第十八讲

函数的最大值和最小值

最大值与最小值

由连续函数的性质，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，那么一定有最大、最小值，这为求函数的最大(小)值提供了理论上的保证.

因为极大(小)值是局部的最大(小)值，故若函数在区间内部(不是端点)取得最大(小)值，那么这个值一定是极大(小)值. 这也就告诉我们：最大(小)值只可能在极值点、区间端点和不可导点之中取得.

下面具体介绍求函数最大(小)值的方法.

(1)求出 $f(x)$在(a,b)上的稳定点;

(2)求出(a,b)上 $f'(x)$不存在的点;

(3) 设(1)和(2)的点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 由前面的分析可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$上有

最大值 $M = \max\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)\}$,

最小值 $m = \min\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)\}$.

例 5 求函数 $f(x)=|2x^3-9x^2+12x|$ 在区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上的最大、最小值.

解 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上连续，故最大(小)值存在.

$$f(x)=\left|\, x(2x^2-9x+12) \,\right|$$

$$=\begin{cases} -x(2x^2-9x+12), & -\frac{1}{4}\le x\le 0 \\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\le \frac{5}{2} \end{cases},$$

所以 $$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12\\ 6x^2-18x+12\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-6(x-1)(x-2)\,,\ -\dfrac{1}{4}\le x<0\\ 6(x-1)(x-2)\,,\ 0<x\le\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

容易计算 $f'(0-0)=-12,\ f'(0+0)=12,$ 并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，由导数极限定理可得

$$-12=f'_-(0)\ne f'_+(0)=12,$$

故在 $x=0$ 不可导.

这样就得到不可导点为 0, 稳定点为 1, 2.

因为

$$f(0)=0,\quad f(1)=5,\quad f(2)=4,$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{115}{31},\quad f\left(\frac{5}{2}\right)=5,$$

所以 最大值为 $f(1)=f\left(\frac{5}{2}\right)=5$, 最小值为 $f(0)=0.$

$$f(x)=\begin{cases}-x(2x^2-9x+12), & -\dfrac{1}{4}\le x\le 0\\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\le\dfrac{5}{2}\end{cases},$$

例 6 证明不等式：$2^x \geq 1+x^2,\quad 0 \leq x \leq 1.$

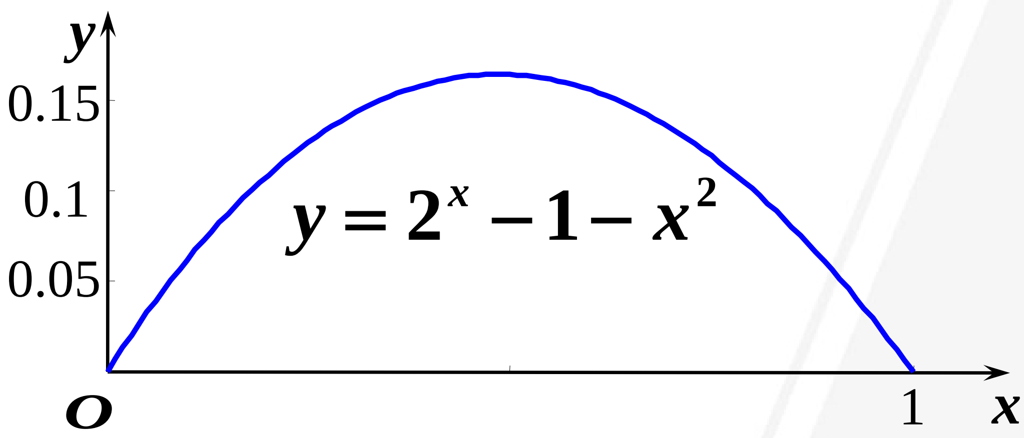
证 设 $f(x)=2^x-1-x^2$. 要证 $f(x)\geq 0$, 也就是要证 $f(x)$ 的最小值非负.

$$f'(x)=2^x\ln 2-2x,\quad f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2.$$

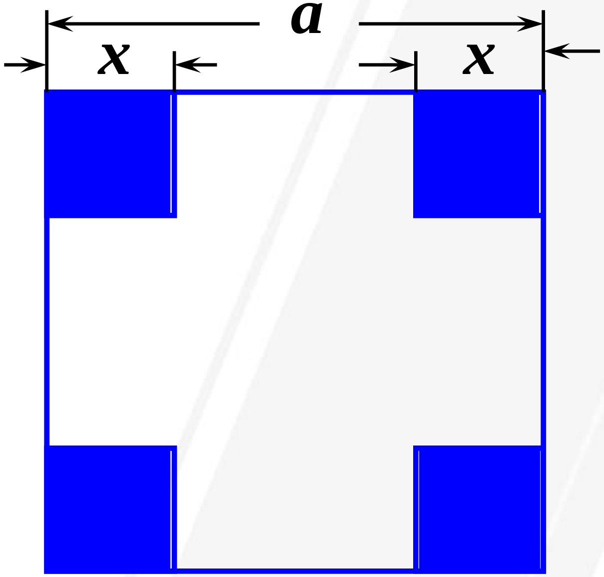
因为在$(0,1)$内$f''(x)<0$, 这就说明$f(x)$在$(0,1)$上无极小值点. 所以最小值只能在端点取到, 故

$$m=\min\{f(0),f(1)\}=0.$$

于是证得 $2^x \geq 1+x^2,\ x\in[0,1].$ （见下图）


y
0.15
0.1
0.05
$y = 2^x - 1 - x^2$
O
1
x

例 7 如图所示, 剪去正方形四角同样大小的小正方形后制成一个无盖的盒子，问剪去的小正方形的边长为何值时, 盒子的容积最大.



解 设正方形的边长为 a, 每一个小正方形的边长为 x，则盒子的容积为

$$V(x)=x(a-2x)^2,\ x\in\left[0,\ \frac{a}{2}\right].$$

因为 $V'(x)=(a-2x)(a-6x)=12\left(x-\dfrac{a}{2}\right)\left(x-\dfrac{a}{6}\right)$,

所以稳定点为 $x=\dfrac{a}{6}$（$x=\dfrac{a}{2}$是端点）. 又

$$V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0,$$

知$V\left(\dfrac{a}{6}\right)=\dfrac{2a^3}{27}$为极大值.

因为$V(x)$在$\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$上仅有唯一的极值, 那么这个极(大)值一定是最大值.

所以问题的解为:在四个角上截取边长为 $\dfrac{a}{6}$ 的小正方形后，得到最大容积为 $\dfrac{2a^3}{27}$ 的无盖盒子.

例8 设某商店每天向工厂按出厂价每件3元购进一批商品零售. 若零售价定为每件 4 元, 估计销售量为 400 件. 若零售价每降低 0.05元, 可多售 40 件, 问每件定价多少和从工厂购进多少时才能获得最大利润.

解 设每件定价为 p，购进 x 件(应该全部卖完), 则利润为 $L=(p-3)x$. 由条件 p 与 x 的关系为

$$\frac{x-400}{p-4}=\frac{440-400}{3.95-4}=-40\div 0.05=-800,$$

即 $x=3600-800p$. 所以

$$L(p) = (p-3)(3600-800p)$$

$$= -800p^2 + 6000p - 10800$$

$$L'(p) = -1600p + 6000 .$$

令 $L'(p) = 0$, $p = 3.75$. $L''(3.75) = -1600 < 0$, 则

$L(3.75)=450$(元) 是极大值. 因为 $L(p)$ 在所讨论的区间上仅有一个极值，所以 $L(3.75)$ 就是最大值.

结论:

(1) 定价为 3.75 元 / 件时可获最大利润 450 元;

(2) 应从工厂购进 $x = 3600 - 800 \times 3.75 = 600$(件).

复习思考题

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 取极大值，是否可断定在 x_0 充分小邻域内，$f(x)$ 在 x_0 的左侧递增，右侧递减？

2. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且仅有惟一的极值点 x_0. 试问当 $f(x_0)$ 为极大(小) 值时，为什么 $f(x_0)$ 必为 I 上的最大(小)值？