# 第十一讲

## 带有佩亚诺余项的泰勒公式

数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

# §3 泰勒公式

多项式函数是最简单的函数.用多项式来逼近一般的函数是近似计算的重要内容,也是数学的研究课题之一.

一、带有佩亚诺型余项的泰勒公式

二、带有拉格朗日型余项的泰勒公式

三、在近似计算中的应用

*点击以上标题可直接前往对应内容

# 带有佩亚诺型余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，由有限增量公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

当 $|x - x_0|$ 充分小时， $f(x)$ 可以由一次多项式

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

近似地代替，其误差为 $o(x - x_0)$. 但在许多情况下，误差仅为 $o(x - x_0)$ 是不够的， 而要考虑用较高次的多项式来逼近 $f$，使得误差更小，如 $o((x - x_0)^n)$.

问题: 在何条件下, 存在一个 $n$次多项式 $P_n(x)$, 使得

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)?$$

答案: 当 $f(x)$在点 $x_0$ 有$n$ 阶导数时, 这样的 $n$ 次多项式是存在的. 现在来分析这样的多项式与 $f(x)$ 之间的关系?

设

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

则

$$P_n(x_0)=a_0,\ \ P_n'(x_0)=a_1,\ P_n''(x_0)=2!a_2,\ \ \cdots,$$

$$P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n,$$

即 $a_0 = P_n(x_0),\ a_1 = \dfrac{P_n'(x_0)}{1!},\ a_2 = \dfrac{P_n''(x_0)}{2!},\cdots,$

$$a_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

上式表明 $P_n(x)$ 的各项系数是由其在点 $x_0$ 的各阶导数所确定的.

设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处 $n$ 阶可导. 如果

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n),$$

即

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

则不难得到

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n, \qquad (1)$$

其中 $k=0$ 表示不求导. 这时称

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (2)$$

为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的 $n$ 阶泰勒多项式，称

$\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为泰勒系数.

注意 $f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$

$T_n(x)$ 确实是我们所需要的多项式.

## 定理6.9

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有$n$阶导数，则

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \qquad (3)$$

证 设 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$，$Q_n(x)=(x-x_0)^n$，

故只需证 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

由 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, $Q_n(x)=(x-x_0)^n$,

得 $R_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-T_n^{(k)}(x)$,

所以

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

$$Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0\,,Q_n^{(n)}(x_0)=n!\,.$$

则当 $x\in U^{\circ}(x_0)$ 且 $x\to x_0$ 时，连续使用 $n-1$ 次洛必达法则，得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0))}{x-x_0} \right]$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0.$$

(3)式称为 $f(x)$在点 $x_0$处的带有佩亚诺型余项的 $n$ 阶泰勒公式.

---

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \quad R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

**注1** 即使 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近满足

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n), \tag{4}$$

也不能说明 $P_n(x)$ 一定是 $f(x)$ 的 $n$ 阶泰勒多项式. 比如

$$f(x)=D(x)\cdot x^{n+1},\ P_n(x)=0,$$

在 $x_0=0$ 处满足 (4). 但是当 $n>1$ 时, $P_n(x)$ 不是 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的 $n$ 阶泰勒多项式, 原因是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的高阶导数(二阶和二阶以上)都不存在, 所以无法构造 $n$ 阶多项式.

**注2** 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 有 $n$ 阶导数，则只有惟一的多项式 ( 泰勒多项式 $T_n(x)$ ) 满足

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

注3 可以证明对任意一个$n$ 次多项式 $P_n(x)$, 存在 $U(x_0)$, 使得

$$|f(x)-T_n(x)|\le|f(x)-P_n(x)|,\ \ x\in U(x_0).$$

这也就是说, $T_n(x)$ 是逼近 $f(x)$ 的最佳 $n$ 次多项式.

在以后的应用中, 公式 (3) 中的 $x_0$ 常被取作 0, 形式变为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

此式称为(带有佩亚诺型余项)的麦克劳林公式.

泰勒 ( Taylor,B. 1685-1731, 英国 )

麦克劳林( Maclaurin,C. 1698-1746, 苏格兰 )