第三讲

有限覆盖定理

实数完备性基本定理之间的等价性

有限覆盖定理

定义3

设 S 为数轴上的一个点集, H为一些开区间的集合(即 H 中的元素均为形如(α, β)的开区间).

若对于任意 $x \in S$, 都存在$(\alpha, \beta) \in H$, 使 $x \in (\alpha, \beta)$, 则称 H 是 S 的一个开覆盖.

若 H是 S 的一个开覆盖, 并且H 中的元素(开区间)仅有有限个, 则称 H 是 S 的一个有限开覆盖.

例如 $H=\left\{\left(\dfrac{1}{n+2}, \dfrac{1}{n}\right) \middle| n=1, 2, \cdots\right\}$ 是区间$(0, 1)$的一个开覆盖.

定理7.3(海涅—博雷尔有限覆盖定理)

设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则从 H 中可选出有限个开区间, 构成闭区间 $[a, b]$ 的一个子覆盖.

证 证明该定理有多种方法. 这里还是运用区间套定理来证明, 仍然要注意区间套的取法.

海涅(Heine,H.E. 1821-1881,德国)

博雷尔(Borel,E.1871-1956, 法国)

若定理不成立，也就是说 $[a, b]$不能被 H 中任何有限个开区间所覆盖. 将区间$[a, b]$等分成两个子区间, 那么这两个子区间中至少有一个不能被 H中任意有限个开区间所覆盖. 设该区间为 $[a_1, b_1]$，显然有

$$[a_1,b_1]\subset[a,b], \text{ 并且} b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a).$$

再将 $[a_1, b_1]$ 等分成两个子区间, 其中至少有一个不能被 H 中有限个开区间所覆盖.

设该区间为 $[a_2,b_2]$. 同样有

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1], \text{ 并且} b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2^2}(b-a).$$

将上述过程无限进行下去, 可得一列闭区间 $[a_n, b_n]$ 满足下列三个性质:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots;$

(ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0, \ n \to \infty;$

(iii) 对每一个闭区间 $[a_n, b_n]$, 都不能被 H 中有限个开区间所覆盖. 由区间套定理, 存在惟一的 ξ, 使

$$\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots .$$

因 $\xi \in [a_1, b_1]$, H 覆盖了 $[a,b]$, 故存在 $(\alpha,\beta) \in H$, 使 $\xi \in (\alpha,\beta)$. 取 $\varepsilon_0 = \min\{\beta-\xi, \alpha-\xi\}$, 由定理7.1的

推论，存在N，使$[a_N, b_N] \subset U(\xi;\varepsilon_0) \subset (\alpha, \beta)$.

这就是说 $[a_N, b_N]$ 被 H 中的一个开区间所覆盖，与(iii)矛盾.

注 定理7.3中的闭区间不可以改为开区间.

比如开区间集 $H = \left\{ \left(\dfrac{1}{n+1}, 1 \right) \middle| n = 1, 2, \cdots \right\}$ 覆盖了区间 $(0, 1)$. 很明显, H 中的任何有限个开区间均不能覆盖 $(0, 1)$.

例3 用定理7.3证明闭区间上连续函数的有界性定理.

证 设 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续, 则 $\forall x \in [a, b]$.
$\exists M_x > 0$, 及 $\delta_x > 0$, 使当 $x' \in [a, b] \cap U(x;\delta_x)$时,
有 $|f(x')| \le M_x$. 作开区间集

$$H = \{(x-\delta_x,\ x+\delta_x) \mid x \in [a,b], |f(x')| \le M_x,\ x' \in [a,b] \cap U(x;\delta_x)\}$$

显然H覆盖了$[a, b]$. 根据有限覆盖定理，存在H中有限个开区间覆盖了$[a, b]$，设这些区间为

$$(x_1-\delta_{x_1},\ x_1+\delta_{x_1}), (x_2-\delta_{x_2},\ x_2+\delta_{x_2}), \cdots, (x_n-\delta_{x_n},\ x_n+\delta_{x_n})$$

令$M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$, 则有 $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$.

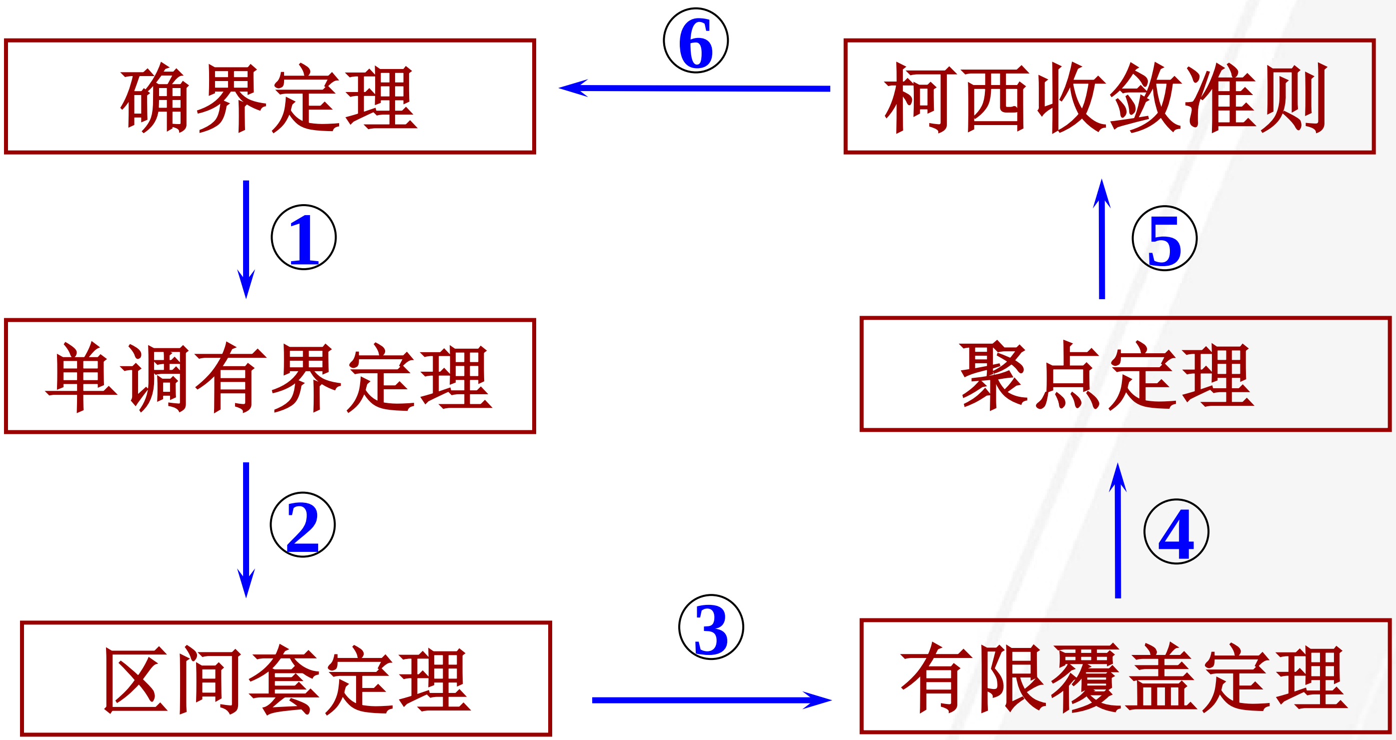
实数完备性基本定理之间的等价性

我们已经学习了关于实数完备性的六个定理, 它们是:

确界定理　　单调有界定理　　区间套定理

聚点定理　　有限覆盖定理　　柯西收敛准则

下面证明这六个定理是等价的.



定理2.11用致密性定理证明了柯西准则，⑤ 成立.

所以在上图的等价性关系中，仅④和 ⑥尚未证明.

这里给出 ④ 的证明， ⑥请大家自己阅读教材.

例3 用有限覆盖定理证明聚点定理.

证 设 S 是无限有界点集，则存在 $M>0$, 使得

$$S\subset[-M,M].$$

若S的聚点集合$S'=\varnothing$, 那么, 任给 $x\in[-M,M]$, x 都不是聚点．这就是说存在$\delta_x>0$(δ_x表示与x有关), 使得$(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap S=$有限集.

设开区间集

$$H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[-M,M],\delta_x>0,$$
$$(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap S=\text{有限集}\}.$$

很明显, H 覆盖了闭区间 $[-M, M]$. 根据有限覆盖定理，存在 H 中的有限个子集

$$H_0 = \{(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \mid i = 1, 2, \cdots, n\},$$

覆盖了闭区间$[-M, M]$.

由H 的构造, $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap S =$ 有限集，所以

$$S = [-M, M] \cap S \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap S = \text{有限集},$$

这与 S 是无限集矛盾.