第五讲

函数的极限 1

· 函数极限的概念

掌握6种类型函数极限概念及性质

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 是指： $\forall \varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$

当$0<|x-x_0|<\delta,\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 是指： $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \delta > 0,$

当 $0 < x - x_0 < \delta,\quad |f(x) - A| < \varepsilon.$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

例1. 给出下列概念的数学语言表述.

（1） $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A,\ A \in \mathbb{R}$；

（2） $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 不存在；

（3） $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$；

（4） $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq -\infty$.

解. （1）$\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\neq A$

$\Longleftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,$ 存在 $x_0,$

$0<|x_0-a|<\delta,\quad |f(x_0)-A|\geq\varepsilon_0.$

（2）$\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ 不存在 $\Longleftrightarrow \forall A\in\mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\neq A$

$\Longleftrightarrow \forall A\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0,$ 存在 $x_0,$

$0<|x_0-a|<\delta,\quad |f(x_0)-A|\geq\varepsilon_0.$

（3） $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$

$\Leftrightarrow \forall G > 0,\quad \exists \delta > 0,\quad$ 当 $0 < x_0 - a < \delta,$

使得 $|f(x)| > G.$

（2） $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq -\infty$

$\Leftrightarrow \exists G_0 > 0,\quad \forall X > 0,\quad$ 存在 $x_0 > X,$

使得 $f(x_0) \geq -G_0.$

例 2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，求证：$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+2h)=A$.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,

当 $0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)\text{-}A|<\varepsilon$.

$$令\ \delta_1:=\frac{\delta}{2},\quad 当\ 0<|h|<\delta_1,$$

$0<|x_0+2h-x_0|=2|h|<\delta$, 故

$$|f(x_0+2h)\text{-}A|<\varepsilon.$$

因此，$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+2h)=A$.

本例考察了函数极限的定义，请思考

思考1　本命题反之也成立，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+2h)=A.$$

思考2　请问是否有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h^2)=A?$$

· 函数极限的性质

唯一性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则此极限唯一.

局部有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，存在 $U^o(x_0)$，使得 f 在 $U^o(x_0)$ 内有界 .

局部保号性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，对任意 $r<A$，存在 $U^o(x_0)$，$\forall x\in U^o(x_0)$，$f(x)>r>0$.

保不等式性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，存在 $U^o(x_0)$，$\forall x \in U^o(x_0)$，$f(x) \le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

迫敛性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，存在 $U^o(x_0)$，$\forall x \in U^o(x_0)$，$f(x) \le h(x) \le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

四则运算

极限运算保持加、减、乘、除（分母不为零）.

例 3. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[xf(x)]}{x}=A,$$

其中 [ ] 表示取整.

证明　由取整函数的性质，

$$xf(x)-1<[xf(x)]\le xf(x),$$

所以对任意 $x>0$,

$$f(x)-\frac{1}{x}<\frac{[xf(x)]}{x} \leq f(x).$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x) = A,$$

由函数极限的迫敛性,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[xf(x)]}{x}=A.$$

例 4. 设 $\varphi(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U^o(x_0;\delta_1)$ 中有定义，且 $\varphi(x)\neq a$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a, \lim\limits_{u\to a}f(u)=A,$ 求证：

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A.$$

证明 由 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,$

当 $u\in U^o(a;\eta),\quad |f(u)-A|<\varepsilon.$

又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)=a$，对上述的$\eta$，$\exists 0<\delta<\delta_1$，

当$x\in U^o\left(x_0;\delta\right)$， $|\varphi(x)-a|<\eta$.

又$\varphi\left(x\right)\neq a$， $0<|\varphi(x)-a|<\eta$. 从而

$$|f(\varphi(x))-A|<\varepsilon.$$

由定义，

$$\lim_{x\to x_0} f\left(\varphi\left(x\right)\right)=A.$$

注 1. 条件中的 $\varphi(x)\neq a$ 不可少. 例如

$$f(u)=\begin{cases}1, & u\neq 0;\\ 0, & u=0,\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0,\qquad \lim\limits_{u\to 0}f(u)=1,$

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}0, & x=0\text{或}\dfrac{1}{n\pi};\\ 2, & \text{其它},\end{cases}$$

但由归结原则, $\lim\limits_{x\to 0}f(\varphi(x))$ 不存在.

注 2. 该命题称为极限的复合运算法则，对其他类型的极限也成立.

注 3. 该命题提供了简化极限的方法，即

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) \overset{u=\varphi(x)}{=} \lim_{u\to a} f(u).$$

例如 对正数 a,

$$\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to 0^+} a^u = 1.$$

应当牢记下列常用的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

例 5. 求下列各函数极限.

(1) $$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\ln e=\frac{1}{a}.$$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $a>0$, 且 $a\neq 0$

解 令 $u=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+u)=\dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$.

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}$$

$$=\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=\ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}}=\ln a.$$

（3） $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$$

（4） $$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$$

解 令$u=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$, 得$u>0$,

且$x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\cot u$. 所以

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{u\to 0^+} u\cdot\cot u$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{u}{\sin u}\cdot\cos u=\lim_{u\to 0^+}\frac{u}{\sin u}\cdot\lim_{u\to 0^+}\cos u=1.$$