第五讲

习题课(一)

重要内容回顾

1.导数的定义、记号;

2.有限增量公式，可导必连续;

3.左右导数，导函数;

4.导数的几何意义，曲线的切线方程和法线方程;

5. 函数的极值，费马定理.

补充例题

例1 讨论 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 的区别.

解 $f'_+(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 的右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

而 $f'(x_0+0)$ 是导数 $f'(x)$ 在 x_0 的右极限:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x),$$

是不同的概念. 其中一个存在, 不能保证另一个也存在.

如函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 的导数为:

$$f'_+(0)=f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

右导数存在；但导数

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的右极限 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$不存在.

又如 $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 右导数不存在；

但其导数 $g'(x)=2x\ (x\neq 0)$，从而

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}2x=0.$$

例2 已知 $f'(2)=1$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-2h)-f(2)}{h}$.

解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{h}$$

$$=(-2)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}$$

$$=(-2)\cdot f'(2)=-2.$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\underline{\Delta x})-f(x_0)}{\underline{\Delta x}}$$

例3 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

$\boxed{\sim x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$,

$\because \lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1,\ f(1)=0,$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\underline{\sin^2 x+\cos x-1})-f(1)}{\underline{\sin^2 x+\cos x-1}}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'(1).$$

例4 设 $|f(x)|$ 在 a 点可导，且 $f(x)$ 在 a 点连续，证明 $f(x)$ 在 a 点也可导.

证 先证 $f(a)=0$ 的情形.

由 $f(a)=0$ 得到 $|f(a)|=0$, 从而 $x=a$ 是 $|f|$ 极小值点，因为 $|f|$ 在 $x=a$ 可导，所以根据费马定理 $|f|'(a)=0.$

而

$$\left|\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right|=\left|\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}\right|$$

$$=\left|\frac{|f(a+\Delta x)|-|f(a)|}{\Delta x}\right|,$$

因此

$$\left|f'(a)\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}\right|$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\left|f(a+\Delta x)\right|-\left|f(a)\right|}{\Delta x}\right|$$

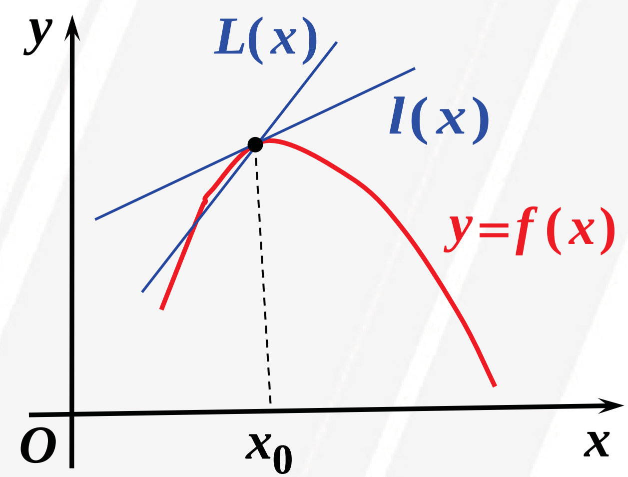
$$= \left|\left|f\right|'(a)\right| = 0,$$

从而得到 $f'(a)=0.$

$f(a)<0$和 $f(a)>0$ 的情形留作习题.

例5 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在 x_0 点的切线. 则对任何一条过 $(x_0, f(x_0))$ 点且不同于 $l(x)$ 的直线 $L(x)=f(x_0)+a(x-x_0)$, 一定存在 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|f(x)-l(x)\right|<\left|f(x)-L(x)\right|.$$



证 只要证明:存在 $\delta>0$, 使当

$$0<|x-x_0|<\delta \text{ 时}, \frac{\left|f(x)-l(x)\right|}{\left|f(x)-L(x)\right|}<1$$

或者

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-l(x)}{f(x)-L(x)}=0 \text{ 即可.}$$

首先，根据有限增量公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ (x\to x_0)$$

因为$L(x)\neq l(x)$，所以$a\neq f'(x_0)$. 于是

$$f(x)-l(x)=o(x-x_0)\ (x\to x_0)$$

$$f(x)-L(x)=(f'(x_0)-a)(x-x_0)+o(x-x_0)\ (x\to x_0).$$

从而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-l(x)}{f(x)-L(x)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)}{(f'(x_0)-a)(x-x_0)+o(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)/(x-x_0)}{(f'(x_0)-a)+o(x-x_0)/(x-x_0)}=0.$$

因此，在所有过点 $(x_0, f(x_0))$ 的直线中，切线 $l(x)$ 是与曲线 $y = f(x)$ “贴合” 最好的.

思考题提示

3. 举出一个函数 $y = f(x)$，它满足

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

但 $x = x_0$ 不是它的垂直切线.

提示：注意第三讲给出垂直切线时要求函数连续.

4. 举出一个函数 $f(x)$，要求它可导，但 $f'(x)$ 不连续. 试想：这种不连续的导函数是否仍有介值性?

导数可以不连续(本讲例1)，但一定有介值性.