第四讲

连续函数的整体性质

闭区间上连续函数的基本性质

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 在本节中将研究 f 在 $[a,b]$ 上的整体性质.

定义1

设 $f(x)$ 为定义在数集 D 上的一个函数. 若存在 $x_0 \in D$, 使得对一切 $x \in D$, 均有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有最大(小)值, x_0 称为最大(小)值点, $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 D 上的最大(小)值.

例如，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 的最大值为1，最小值为-1；正弦函数 $y=\sin x$ 的最大值为1，最小值为-1；函数 $y=x-[x]$ 的最大值不存在，最小值为零.

注意： $y=\sin x$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上既无最大值，又无最小值（其上确界为1，下确界为$-1$）.

定理4.6（最大、最小值定理）

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有最大、最小值.

这个定理刻画了闭区间上连续函数的一个深刻的内涵，在今后的学习中有很广泛的应用.

为了更好地证明定理，我们先证明一个引理.

引理（有界性定理）

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证 若不然，不妨设 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界. 则存在 $x_n \in [a,b]$，使得

$$f(x_n) > n, n = 1, 2, \dots,$$

由此得到$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. 因为$\{x_n\}(\subset [a,b])$是有界数列，所以由致密性定理,$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, 由于 $a \le x_{n_k} \le b$, 由极限的不等式得

$a \le x_0 \le b$，故 $f(x)$ 在 x_0 上连续.

由归结原则推得

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

矛盾. 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定理4.6的证明 由引理和确界原理，存在上确界

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = M.$$

下面说明：存在 $\xi \in [a,b]$，使 $f(\xi) = M$. 若不然，对一切 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) < M$. 令

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad x \in [a,b].$$

易见函数$g(x)$在$[a,b]$上连续，且取正值．由引理$g(x)$有上界J，即有

$$0<g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\le J,x\in[a,b].$$

从而推得$f(x)\le M-\frac{1}{J},x\in[a,b].$

但这与M是$f(x)$在$[a,b]$上的上确界矛盾．所以存在

$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=M$．即$f(x)$在$[a,b]$上取最大值.

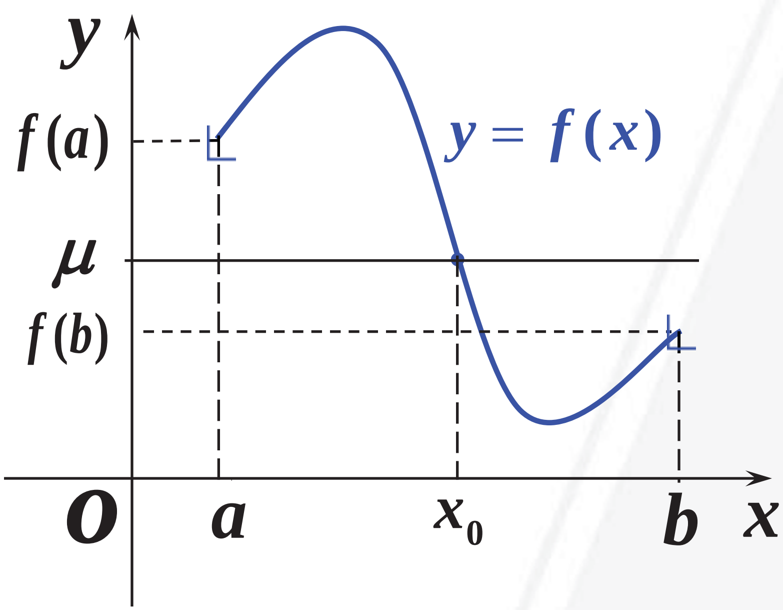
同理，$f(x)$在$[a,b]$上取最小值.

定理4.7 （介值性定理）

设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$. 若μ是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数($f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(b)<\mu<f(a)$), 则(至少)存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得

$$f(x_0)=\mu.$$

从几何上看，当连续曲线 $y = f(x)$ 从水平直线 $y = \mu$ 的一侧穿到另一侧时，两者至少有一个交点.



推论（根的存在性定理）

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)=0.$

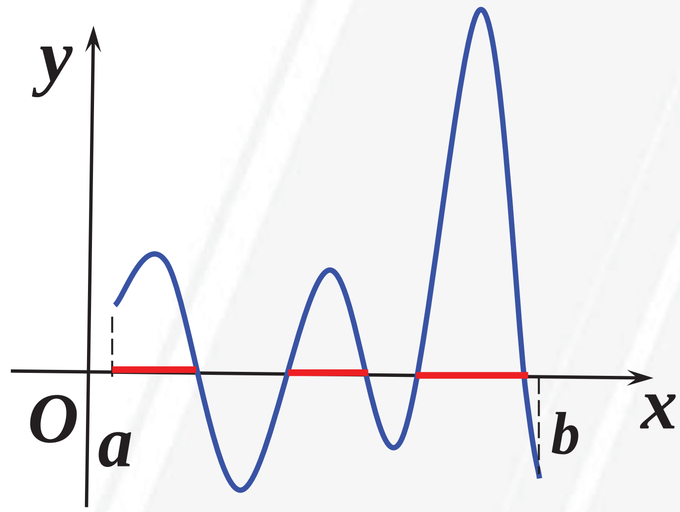
应当注意，此推论与定理4.7是等价的. 于是, 只要证明了推论，也就完成了定理4.7的证明.

下面用确界定理来证明上述推论，大家要注意学习确界定理的使用方法.

证 不妨设 $f(a)>0,\ f(b)<0$，并设

$$E=\{x\mid x\in[a,b],\ f(x)\geq 0\}.$$

(E为图中x轴上的红线部分) 从几何上看，E的最大值就是函数的零点. 证明如下:



因为 $a\in E$，所以 $E\neq\varnothing$，又 E 是有界的，故由确界定理，$x_0=\sup E$ 存在，显然 $a\leq x_0\leq b$.

我们来否定下面两种情形:

1. 若 $f(x_0)>0$，则有 $a \le x_0 < b$. 由 $f(x)$在点 x_0是连续的, 根据保号性,存在 $\delta>0\ (x_0+\delta<b)$，使当 $x\in[x_0, x_0+\delta)$时, 仍有

$$f(x)>0.$$

特别是 $f(x_0+\frac{\delta}{2})>0$，而 $x_0+\frac{\delta}{2}\in E$，这就与 $x_0=\sup E$ 相矛盾.

2.若 $f(x_0)<0$, 则有 $a<x_0\le b$. 同样根据保号性,

$\exists\,\delta>0\,(x_0-\delta>a)$, 当 $x\in(x_0-\delta\,,x_0]$时, $f(x)<0.$

同时由 $x_0=\sup E$, 对上述δ, 存在 x_1, 使得

$$x_0-\delta<x_1\le x_0,\ x_1\in E.$$

从而 $f(x_1)\ge 0$, 也导致矛盾.

排除了上面两种情形后, 就推得 $f(x_0)=0.$

由介值性定理与最大、最小值定理立刻得到如下结论:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么它的最大值 M 与最小值 m 存在, 并且

$$f([a,b])=[m,M].$$

下节会再举一些应用介值性定理的例题.