数学分析 第一章
实数集与函数

§3 函数概念

函数的概念，在中学数学中我们已有了初步的了解. 本节将作进一步的讨论.

一、函数的定义

二、函数的四则运算

三、复合函数

四、反函数

五、初等函数

*点击以上标题可直接前往对应内容

第五讲

函数的概念

函数的定义

定义1

D与M是R中非空数集，若有对应法则f，使D内每一个数x，都有惟一的一个数$y\in M$与它相对应，则称f是定义在D上的函数，记作

$$f: D\to M,$$
$$x\mapsto y.$$

D称为f的定义域；

$f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$称为$f$的值域；

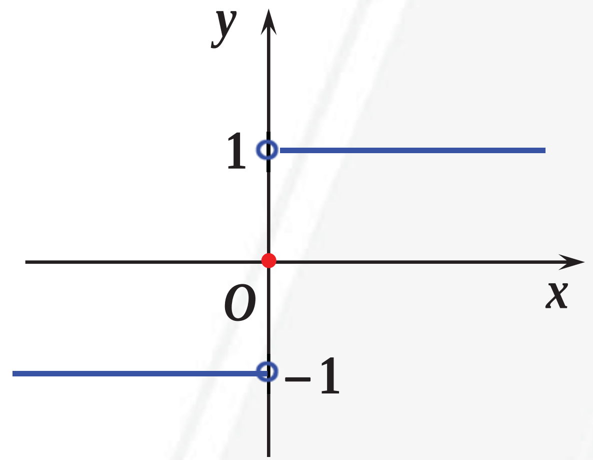
$G=\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为 f 的图象.

注1 函数由定义域 D 和对应法则 f 二要素完全决定，因此若给出函数的定义域和对应法则，就确定了函数. 它与自变量和因变量的符号无关.

注2 表示函数有多种方法，常见的有：解析法、数值法和图像法. 解析法表示函数时，若没有特别指明其定义域，则一般约定其定义域为使该解析式有意义的自变量的全体(即存在域).

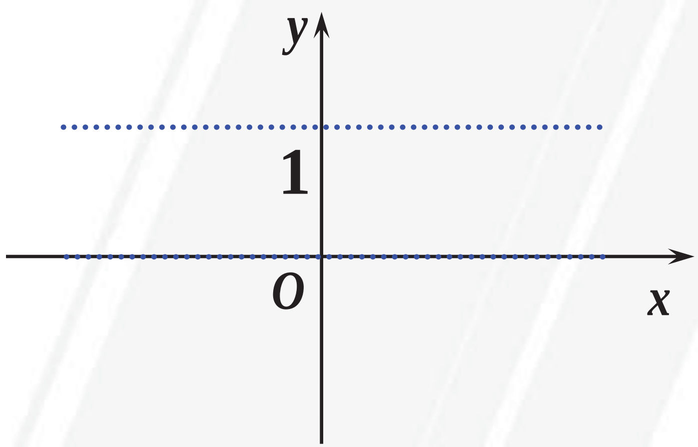
例1 符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$



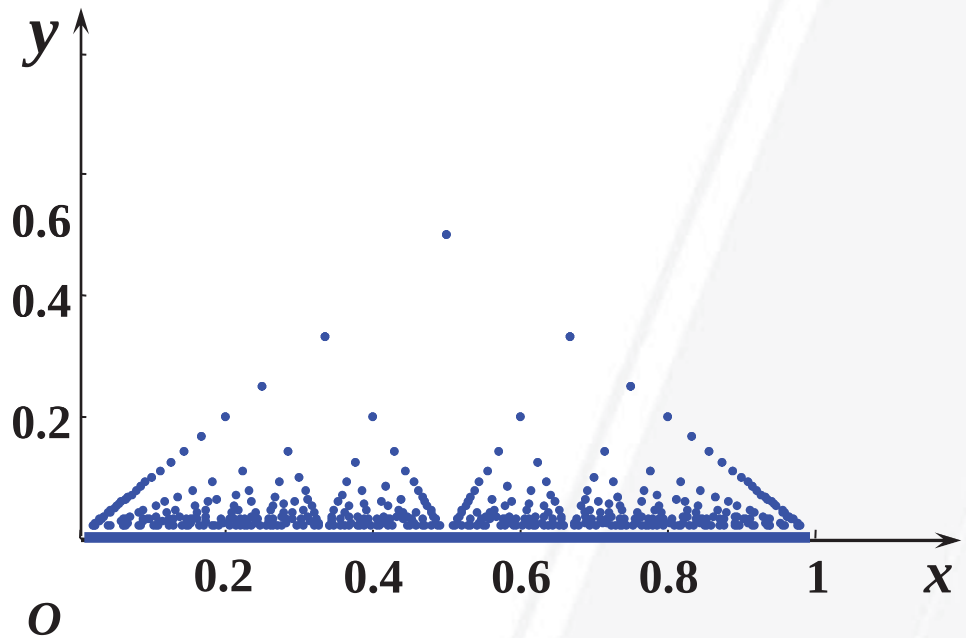
例2 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}.\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$



例3 黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ \left(p,q\in\mathbf{N}_+,\ \dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\right),\\ 0, & x=0,1 \text{ 或 } x\in(0,1)\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$



狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.
1805－1859, 德国)

黎曼(Riemann,B. 1826－1866,德国)

函数的四则运算

设函数 f 的定义域为D_f,函数g 的定义域为D_g,

1. $f \pm g$ 的定义域为 $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$,

且$\forall\, x \in D_f \cap D_g$, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.

2. $f \cdot g$的定义域为 $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$,

且$\forall\, x \in D_f \cap D_g$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3. $\dfrac{f}{g}$ 的定义域为 $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D^*$, 其中$D^* = \{x \mid x \in D_g$,

且$g(x) \neq 0\}$, $\quad \forall\, x \in D_{\frac{f}{g}}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

复合函数

设函数 f 的定义域为 D_f ,函数 g 的定义域为 D_g,

复合函数 $f\circ g$ 的定义域为

$$D_{f\circ g}=\{x \mid x\in D_g, \text{且}\ g(x)\in D_f\},\ \text{则}$$

$$\forall\ x\in D_{f\circ g},\ \ f\circ g(x)=f(g(x)).$$

例4 函数 $f(u)=\sqrt{u}, u\in[0,+\infty)$ 与函数 $g(x)=1-x^2$, $x\in\mathrm{R}$ 的复合函数为 $y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}$, 其中 $D_{f\circ g}=[-1,1]$.

例5 设 $f(x)=x^2, g(x)=\arcsin x, h(x)=\ln x$. 则

$$(f\circ g\circ h)(x)=\arcsin^2(\ln x),\quad D_1=[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}];$$

$$(f\circ h\circ g)(x)=\ln^2(\arcsin x),\quad D_2=(0,1];$$

$$(g\circ f\circ h)(x)=\arcsin(\ln^2 x),\quad D_3=[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}];$$

$$(g\circ h\circ f)(x)=\arcsin(\ln x^2),\quad D_4=[\mathrm{e}^{-1/2},\mathrm{e}^{1/2}];$$

$$(h\circ f\circ g)(x)=\ln(\arcsin^2 x),\quad D_5=[-1,0)\cup(0,1];$$

$$(h\circ g\circ f)(x)=\ln(\arcsin(x^2)),\quad D_6=[-1,0)\cup(0,1].$$

其中 $D_k, k=1,\cdots,6$ 是相应复合函数的定义域.

反函数

若函数 f 的定义域为 D_f, 满足:

$$\exists\text{唯一}\ x\in D, \exists\text{唯一}\ x\in D,\ \text{使}\ f(x)=y,$$

则存在函数 f^{-1}, $D_{f^{-1}}=f(D)$ 且 $\forall y\in f(D)$,

$f^{-1}(y)=x$, 其中 x 是使 $f(x)=y$ 的唯一的 $x\in D$.

注 反函数表示式 $f^{-1}(y)=x$ 中, y 是自变量, x 是因变量. 由于函数与自变量、因变量记号无关, 因此一般反函数 f^{-1} 记为 $y=f^{-1}(x)$.

例6 双曲函数 sh x 和 ch x 定义如下:

$$\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}),\ \operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}),\ x\in\mathbf{R}.$$

sh x 在 $\mathbf{R}$ 上严格增，因此 sh x 有反函数.

设 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$, 得到 e^{x} 的一元二次方程

$$(\mathrm{e}^{x})^{2}-2y\mathrm{e}^{x}-1=0.$$

解得 $x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)$,

因此 $y=\operatorname{sh} x$ 的反函数为

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right),\ x\in\mathbf{R}.$$

ch x 在 $\mathbf{R}_+$和 $\mathbf{R}_-$ 的值域均为$[1,+\infty)$, 在 $\mathbf{R}_+$上严格增，在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减.

设 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$(e^x)^2-2ye^x+1=0.$$

解得 $$x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right),$$

因此 ch x 在 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}_-$ 的反函数分别为

$$y_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty).$$

$$y_2=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty).$$

初等函数

定义1

以下六类函数称为基本初等函数

(1) 常量函数 $y = c$ (c为常数);

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数);

(3) 指数函数 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

(5) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$y = \tan x$, $y = \cot x$;

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

定义2

$\forall a>0, a\neq 1$. 设 x 是无理数, 定义

$$a^x=\begin{cases}\sup\{a^r \mid r\in \mathbf{Q}, r<x\}, & a>1,\\ \inf\{a^r \mid r\in \mathbf{Q}, r<x\}, & 0<a<1.\end{cases}$$

定义3

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数.

狄利克雷函数与黎曼函数是非初等函数.