

数学分析 第一章 实数集与函数

“ 数学分析研究的是实数集上定义的函数, 因此我们首先要掌握实数的基本概念与性质.

§1 实数

- 一、实数的十进制小数表示
- 二、实数的大小
- 三、实数的四则运算
- 四、实数的阿基米德性
- 五、实数的稠密性
- 六、实数与数轴上的点一一
对应
- 七、实数的绝对值与三角形不
等式

*点击以上标题可直接前往对应内容

第一讲

实数的基本性质 1



记号与术语

\mathbf{R} : 实数集

\mathbf{N} : 自然数集 (包含0)

\mathbf{R}_+ : 正实数集

\mathbf{N}_+ : 正整数集

\mathbf{R}_- : 负实数集

\forall : 任意

\mathbf{Q} : 有理数集

\exists : 存在

\mathbf{Z} : 整数集

后退

前进

目录

退出



实数的十进制小数表示

1. 任何一个实数都可以用十进制小数表示.

若 $x \in \mathbf{R}_+$, 则 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$;

$x \in \mathbf{R}_-$, 则 $x = -a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$.

其中 $a_0 \in \mathbf{N}$, $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $n = 1, 2, \dots$

约定 $0 = 0.000\ 0 \cdots$.

2. 有限小数 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_k$ (其中 $a_k \neq 0$), 又可表示为

$$\begin{aligned}x &= a_0.a_1a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)99 \cdots \\ &= a_0.a_1a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)\dot{9}.\end{aligned}$$



若实数都用无限小数表示，则表达式是唯一的。

即：若 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,

$$y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

则 $x = y \Leftrightarrow a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots$.

用无限小数表示实数，称为**正规表示**。

3. $\mathbf{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n}, \text{其中 } m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ 表示有理数集。

$\forall x \in \mathbf{Q}$, x 可用循环十进制小数表示，

如 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}42857$.



一般, 若 $x = \frac{m}{n}$, 则 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_k \dot{a}_{k+1} \cdots \dot{a}_{k+p}$,
其中 $p < n$.

反之, 若 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_k \dot{a}_{k+1} \cdots \dot{a}_{k+p}$,

$$\text{则 } x = a_0 + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^p - 1} \sum_{j=1}^p \frac{a_{k+j}}{10^{k+j-p}} \in \mathbf{Q}.$$

4. 无理数为无限不循环小数.

如: $\pi = 3.1415926 \cdots$;

$x = 0.1010010001 \cdots$.



实数的大小

▶ 定义1

$\forall x, y \in \mathbf{R}_+$, 若

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots, y = b_0.b_1b_2 \cdots b_n \cdots$$

是正规的十进制小数表示, 规定

$$x > y \Leftrightarrow a_0 > b_0 \text{ 或 } \exists n \in \mathbf{N}, \text{ 使}$$

$$a_0.a_1a_2 \cdots a_n = b_0.b_1b_2 \cdots b_n, \text{ 而 } a_{n+1} > b_{n+1}.$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}_-$, 规定 $x > y \Leftrightarrow -x < -y$.

$\forall x \in \mathbf{R}_+, y \in \mathbf{R}_-$, 规定 $y < 0 < x$.



实数的大小关系有以下性质:

(1) $x > y$, $x = y$, $x < y$.

三者必有其中之一成立, 且只有其中之一成立.

(2) 若 $x > y$, $y > z$, 则 $x > z$.

即大小关系具有传递性.



实数的四则运算

有理数集 \mathbf{Q} 对加、减、乘、除（除数不为 0 ）是封闭的.

实数集 \mathbf{R} 对加、减、乘、除（除数不为 0 ）亦是封闭的.

实数的四则运算与大小关系, 还满足:

- (1) $\forall x, y \in \mathbf{R}, \lambda \in \mathbf{R}_+$, 若 $x < y$, 则 $\lambda x < \lambda y$.
- (2) $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 则 $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$.

