第七讲

函数的连续性

· 函数连续的概念

函数 f 在点 x_0处连续

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x : |x - x_0| < \delta,$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

函数 f 在区间 I上连续

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x_0 \in I, \text{ 函数 } f \text{ 在点 } x_0 \text{处连续.}$$

函数 f 在点 x_0处左连续

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

函数 f 在点 x_0处右连续

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

故函数 f 在点 x_0 处连续

$\Leftrightarrow$ f 在点 x_0处既左连续， 又右连续.

· 归结原则

函数 f 在 $U^o(x_0)$ 有定义，f 在 x_0 处极限存在

$$\Longleftrightarrow \forall\{x_n\}\subset U^o(x_0),\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\text{存在}.$$

函数 f 在 $U(x_0)$ 有定义，f 在 x_0 处连续

$$\Longleftrightarrow \forall\{x_n\}\subset U(x_0),\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

例 1. 设函数 f 在点 $x=0$ 处连续, 且满足

$$f(x)=f(2x)\ ,x\in(-\infty,+\infty)$$

证明 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的常函数.

证明 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 由条件, 可得

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right),\quad n=1,2,\ldots$$

因此,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

由于 f 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$,

因此由归结原则得到

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0).$$

于是 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=f(0)$.

所以 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的常函数.

例 2. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，定义

$$g(x):=f(x+0),\ x\in(-\infty,+\infty),$$

求证：g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上每一点右连续.

证明 首先由函数极限的单调有界定理，

g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数. 任取 $x_0\in\mathbb{R}$,

由定义，

$$g(x_0)=f(x+0)\quad=\lim_{y\to x_0^+}f(y)$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对任何 $y \in U_+^o(x_0;\delta)$,

$$|f(y) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对 $\forall x \in U_+^o(x_0;\delta)$, 在上面的不等式中令 $y \to x^+$, 得到

$$|\lim_{y\to x^+} f(y) - g(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

即对 $\forall x \in U_{+}^{o}\left(x_0;\delta\right)$，有

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon,$$

因此， $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} g(x)=g(x_0),$

所以， g 在 x_0处右连续.

g 在 $(-\infty,+\infty)$上每一点右连续.

· 函数的间断点

设 f 在 $U^o(x_0)$上有定义，若 f 在 x_0 处不连续，

则称 x_0 是 f 的间断点.

现设 x_0 是 f 的间断点， 分成以下两种类型

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，

则称 x_0 是 f 的第一类间断点.

否则称 x_0 是 f 的第二类间断点.

特别地，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在，

f 在 x_0 无定义，或者 $f\left(x_0\right) \neq A$，

则称 x_0 是 f 的可去间断点.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，

则称 x_0 是 f 的跳跃间断点.

可去间断点，跳跃间断点均是第一类间断点.

例 3. 研究函数 f 的连续性，并且指出间断点的类型，其中

$$f(x)=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}.$$

解

由初等函数的连续性，f 在 $x\neq 0,1,-1$ 时连续.

因为
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

所以，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 又因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{x(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{-x(x^2-1)} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = -1$$

所以，$x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

因为

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x}{-x(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - x}{-x(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^-} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = +\infty$$

所以， $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 4. 判断：单调函数仅可能有第一类间断点.

解 正确. 不妨设 f 在区间 I 上的递增，且 $x_0 \in I$ 是 f 的间断点.

于是当 $x \in I$ 且 $x < x_0$，有 $f(x) \le f(x_0)$.

从而由函数极限的单调有界定理，

$$f(x_0-0)\text{存在，且 } f(x_0-0) \le f(x_0).$$

同理，$f(x_0+0)$ 存在，

故 x_0 是 f 的第一类间断点.

- 连续函数的性质

局部性质

局部有界性　　局部保号性

四则运算　　复合函数运算

整体性质

有界性定理　　最大、最小值定理

介值性定理　　根的存在定理

例 5. 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在. 求证：f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值.

证明

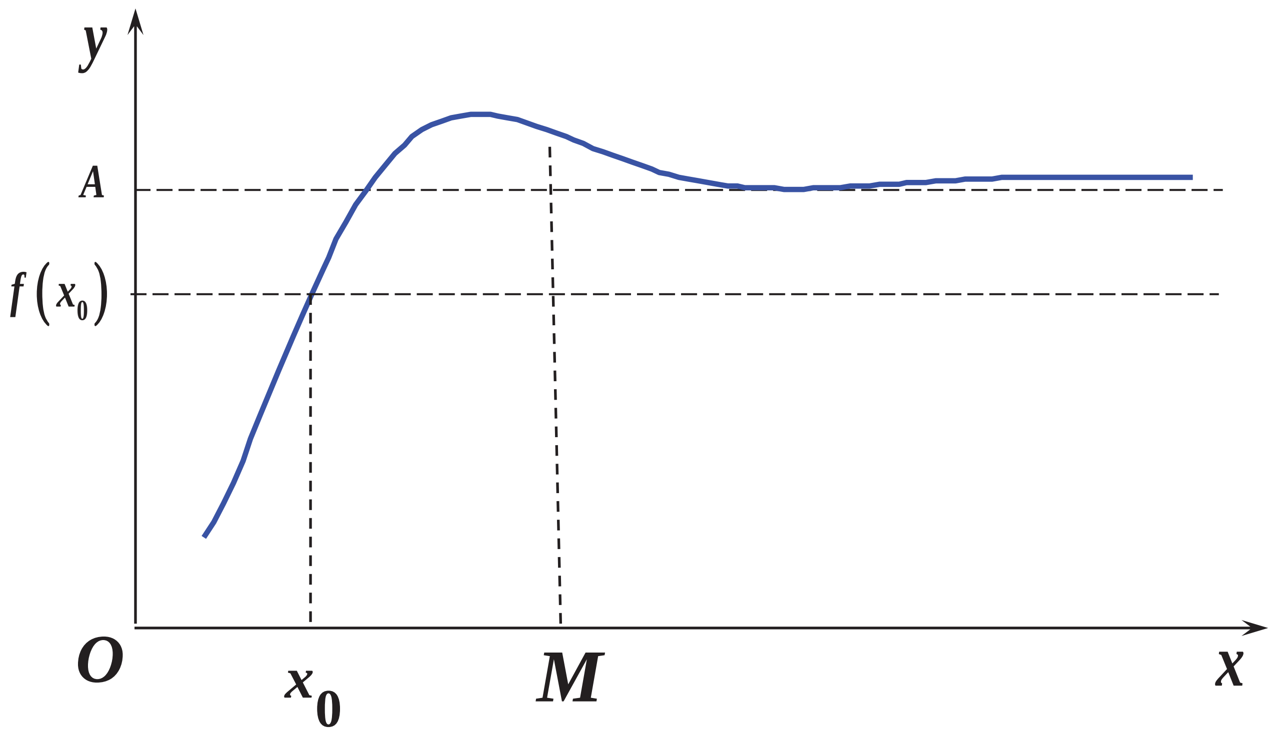
设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

如果 $f(x)\equiv A$，结论显然成立.

不妨 $\exists\, x_0 \in [a,+\infty)$, 使得 $f(x_0) < A$.

根据保号性，$\exists\, M > x_0$, 使得 $\forall x > M$,

有 $f(x) > f(x_0)$.



因 f 在 $[a,M]$ 上连续， 由最值定理，

f 在 $[a,M]$ 上存在最小值 m .

而对于 $x\in(M,+\infty)$， $f(x)>f(x_0)\geq m$.

因此，m 也是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值 .

思考1 条件 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 能否去掉？

思考2 对于 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，

需要什么条件能保证结论仍成立？

例 6. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且满足

$\forall\, x\in[a,b]$，$\exists\, y\in[a,b]$，使得

$$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|.$$

求证：方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有根.

证明 任意取定 $x_0\in[a,b]$，根据条件，

$\exists\, x_1\in[a,b]$，使得

$$|f(x_1)|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|.$$

$\exists\, x_2 \in [a,b]$，使得 $|f(x_2)| \le \dfrac{1}{2}|f(x_1)|$.

$$\cdots\cdots$$

$\exists\, x_n \in [a,b]$，使得 $|f(x_n)| \le \dfrac{1}{2}|f(x_{n-1})|$.

$$\cdots\cdots$$

得到数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$，使得

$$0 \le |f(x_n)| \le \frac{1}{2}|f(x_{n-1})|$$

$$\le \frac{1}{2^2}|f(x_{n-2})| \le \cdots \le \frac{1}{2^n}|f(x_0)|$$

由迫敛性，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0.$

因为数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，由致密性定理，存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$，且 $\xi\in[a,b]$. 根据 f 在 ξ 处的连续性，

$$f(\xi)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0.$$

利用连续函数的性质本题也可证明如下.

另证 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内无零点.

因 f 在 $[a,b]$上连续，故$|f|$在$[a,b]$上连续，

由最值定理，$|f|$ 在$[a,b]$上取最小值$|f(x_0)|$.

由假设，$|f(x_0)|>0$. 据条件，$\exists\, x_1\in[a,b]$，

使得 $|f(x_1)|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|$.

所以 $|f(x_1)|<|f(x_0)|$. 矛盾.