第三讲

数列极限

极限的定义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n > N,$$
$$有\left|a_n - a\right| < \varepsilon.$$

几何意义 对任意的 $\varepsilon>0$，在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外至多有有限项．这些有限项的最大下标为$N$，$n>N$时，$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$．直观上 $\{a_n\}$ 中的项凝聚在 a 的周围.

发散的定义

注意到 $\{a_n\}$ 发散是指，对任何实数 a，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$

$$\{a_n\}\text{发散} \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R},\quad \exists \varepsilon_0 > 0,\quad \forall N \in \mathbb{N},$$

$$\exists n > N,\quad |a_n - a| \geq \varepsilon_0 .$$

几何方法 对任何实数 a，存在 $\varepsilon_0 > 0$，

$(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 外只有有限多项.

例 1. 用 ε-N 定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\frac{5}{3}$$

证明

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|=\left|\frac{3n+4}{3\left(3n^2-2\right)}\right|$$

$$\le\frac{4n}{3\times 2n^2}=\frac{2}{3n}<\varepsilon,\qquad (n>4)$$

取

$$N=\max\left\{\frac{2}{3\varepsilon},1\right\}$$

当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon.$$

注意 这里运用了“放大法” $|a_n-a|<G(n)<\varepsilon.$

例 2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证明 $\forall A\in\mathbb{R}$, 不妨 $A\geq 0$, $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall N>0$

在开区间 $\left(2N\pi+\frac{5}{4}\pi, 2N\pi+\frac{7}{4}\pi\right)$ 中取自然数 n_0,

$\because 7\pi/4-5\pi/4=\pi/2>1$

则

$$\left|\sin n_0-A\right|=A-\sin n_0\ >A+\frac{\sqrt{2}}{2}\geq\varepsilon_0$$

例 3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对任意正整数 k，证明

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$$

注意 这里 $\{a_{n+k}\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 删去前面 k 项所得.

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \text{有} |a_n - a| < \varepsilon.$$

因为 $n+k > N$，所以 $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$.

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$$

例 4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n a_n$ 不存在.

证明 （采用几何方法予以证明）

不妨设 $a>0$， 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对 $\varepsilon_0 = \dfrac{a}{2} > 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, 有 $a_n \in (a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$.

对 $\forall A \in \mathbb{R}$，不妨 $A>0$， 当 $n>N$ 时,

$$(-1)^{2n-1} a_{2n-1} \in (-a-\varepsilon_0, -a+\varepsilon_0)$$

而

$$\left(-a-\varepsilon_0,-a+\varepsilon_0\right)\bigcap\left(A-\varepsilon_0,A+\varepsilon_0\right)=\Phi$$

故在 $\left(A-\varepsilon_0,A+\varepsilon_0\right)$ 外有 $\left\{(-1)^n a_n\right\}$ 的无穷多项.

说明

$$\lim_{n\to\infty}\left(-1\right)^n a_n \neq A.$$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1\right)^n a_n$ 不存在.

数列极限的性质

我们已经学习了数列极限的一些重要性质

1. 唯一性　2. 有界性　3. 保号性

4. 保不等式性　5. 迫敛性　6. 四则运算

应当牢记下列常用的极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\quad |q|<1;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0;$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\quad a>0;\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{c^n} = 0,\qquad |c|>1;$

5. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & k=m; \\ 0, & k>m \end{cases},$$

$$\left(k \ge m, a_m b_k \ne 0\right)$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^k} = 0 \qquad \left(a>0, a\ne 1, k\ge 1\right).$$

Stolz定理

下面介绍一个非常有用的定理

定理 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$满足：

1）$\{y_n\}$ 严格单调增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=0$ ；

2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$$

证明 先设 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0$，故

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,\ -\varepsilon<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<\varepsilon$$

即 $$-\varepsilon\left(y_{n+1}-y_n\right)<x_{n+1}-x_n<\varepsilon\left(y_{n+1}-y_n\right),\quad n\geq N$$

可分别取 $n=N,N+1,\cdots,k$，将这些项相加得

$$-\varepsilon\left(y_{k+1}-y_N\right)<x_{n+1}-x_N<\varepsilon\left(y_{k+1}-y_N\right),$$

故

$$-\varepsilon\left(1-\frac{y_N}{y_k}\right)+\frac{x_N}{y_k}<\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}<\varepsilon\left(1-\frac{y_N}{y_k}\right)+\frac{x_N}{y_k},$$

又 $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=+\infty$ ，所以

$$\lim_{k\to\infty}\left[-\varepsilon\left(1-\frac{y_N}{y_k}\right)+\frac{x_N}{y_k}\right]=-\varepsilon,\qquad \lim_{k\to\infty}\left[\varepsilon\left(1-\frac{y_N}{y_k}\right)+\frac{x_N}{y_k}\right]=\varepsilon$$

当 $\exists N^{*}>N, \forall n>N^{*}$，有

$$-\varepsilon\left(1-\frac{y_N}{y_k}\right)+\frac{x_N}{y_k}>-2\varepsilon, \qquad \varepsilon\left(1-\frac{y_N}{y_k}\right)+\frac{x_N}{y_k}<2\varepsilon,$$

从而

$$-2\varepsilon<\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}<2\varepsilon,$$

由此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0.$$

故$A \neq 0$ 时， 令

$$z_n = x_n - A y_n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n} = 0.$$

由前面的证明， 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = 0$ ． 从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

例 5. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明 令 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $y_n = n$,

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

由Stolz定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$$

注 由不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

可推得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$