第二讲

聚点定理

聚点定理

定义2

设 S 为数轴上的非空点集，ξ 为直线上的一个定点(当然可以属于 S，也可以不属于S). 若对于任意正数 ε，在 $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ 中含有S 的无限个点，即 $U(\xi;\varepsilon)\cap S=$ 无限集，则称ξ是 S 的一个聚点.

比如：0 是 $S=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的一个聚点；

$-1, 1$ 是 $S=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$的两个聚点.

若设 S 是 $[0, 1]$中的无理数全体，则 S 的聚点集合 S' (称为 S 的导集) 为闭区间 $[0, 1]$.

为了便于应用,下面介绍两个与定义 2 等价的定义.

定义2′

设 $\varnothing \neq S \subset R,\ \xi \in R$. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, $U^{\circ}(\xi;\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$, 那么称 ξ 是 S 的一个聚点.

定义2″

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$, 那么极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ 称为S的一个聚点.

下面简单叙述一下这三个定义的等价性.

定义2 → 定义2′ 由定义直接得到.

定义2′ → 定义2″ 因为 $\forall \varepsilon > 0,\ U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S \neq \varnothing$,

取 $\varepsilon_1 = 1,\ \exists x_1 \in U^\circ(\xi;1)\cap S$;

取 $\varepsilon_2 = \min\{1/2, |x_1 - \xi|\},\ \exists x_2 \in U^\circ(\xi;\varepsilon_2)\cap S$;

$\cdots\cdots$;

取 $\varepsilon_n = \min\{1/n, |x_{n-1} - \xi|\},\ \exists x_n \in U^\circ(\xi;\varepsilon_n)\cap S$;

$\cdots\cdots$.

这样就得到一列 $\{x_n\}\subset S$. 由 ε_n 的取法, $\{x_n\}$ 两两互异, 并且

$$0 < |\xi - x_n| < \varepsilon_n \le \frac{1}{n},$$

由此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

定义2″→定义2 由极限的定义可知这是显然的.

定理7.2（聚点定理）

实数轴上的任意有界无限点集必有聚点.

这里再次使用区间套定理来证明聚点定理, 请务必要注意在区间套的构成中所建立的性质 (iii).

证 因为S为有界点集, 所以存在正数 M, 使

$$S \subset [-M, M], \text{ 且记 } [a_1, b_1] = [-M, M].$$

现将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个子区间 $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$, 其中$c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. 那么$[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$中至少有一个区间含有 S 的无限多个点.

记该区间为$[a_2, b_2]$. 显然有$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$,

$$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=M.$$

再将$[a_2, b_2]$等分为两个子区间. 同样至少有一个子区间含有 S 的无限多个点, 将这个区间记为$[a_3, b_3]$. 显然又有$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]$,

$$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M}{2}.$$

无限重复这个过程, 就可得到一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$, 满足 (i) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\ n=1,2,\cdots;$

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{M}{2^{n-2}}\to 0;$

(iii) 每个闭区间$[a_n, b_n]$均含S的无限多个点.

由区间套定理, 存在唯一的$\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$.

由定理7.1的推论: 对于任意的正数ε, 存在N, 使

$$[a_N, b_N] \subset U(\xi; \varepsilon),$$

所以由所建立的性质(iii),

$$U(\xi;\varepsilon) \cap S \supset [a_N, b_N] \cap S = \text{无限集}.$$

这就证明了ξ是S的一个聚点.

定理7.2 有一个非常重要的推论(致密性定理).

推论（致密性定理）

有界数列必有收敛子列.

证 设$\{x_n\}$为有界数列, 若$\{x_n\}$中有无限项相等, 取这些相等的项可成一个子列. 该子列显然是收敛的. 若数列$\{x_n\}$不含有无限多个相等的项, 则$\{x_n\}$作为点集是有界的. 由聚点原理, 可设ξ是$\{x_n\}$的一个聚点, 那么再由定义 2$''$, 可知$\{x_n\}$中有一个子列收敛于ξ.

致密性定理是聚点定理的特殊情形.

聚点定理也可以用致密性定理证明.

例2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\{x_n\}\subset[a,b]$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, 那么存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=A$.

证 因$\{x_n\}\subset[a,b]$，故$\{x_n\}$有界. 由致密性定理，$\{x_n\}$存在一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$.

又因 $a\le x_{n_k}\le b$，由极限的不等式性质，可得

$$a\le x_0\le b.$$

由于$f(x)$在点x_0连续，根据归结原理

$$A=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$