第三讲

函数极限的概念 3

为了简洁地求出定义中的 δ，可以将所考虑的式子适当放大，或许这样所求出的 δ 不是“最佳”的，但这不影响解题的有效性. 首先继续看几个例子.

例1 证明：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

证 首先，在右图所示的单位圆内，

$$(1)\ \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0;$$

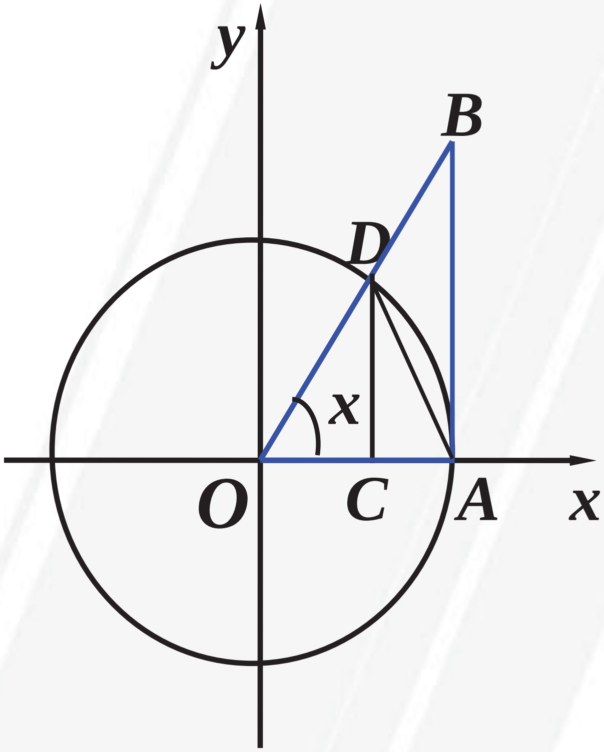
当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，显然有

$$S_{\Delta OAD}<S_{扇形OAD}<S_{\Delta OAB},$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

故 $$\sin x<x<\tan x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$



因为当$x\geq\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x\leq 1<x$，

故对一切$x>0$，有$\sin x<x$.

又因为 $\sin x$, x 均是奇函数，故

$$|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

上式中的等号仅在 $x = 0$ 时成立.

对于任意正数ε, 取$\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|$$

$$\le |x - x_0| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

同理可证: $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

例2 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}\ (|x_0|<1)$.

证 因为

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|=\frac{|x-x_0||x+x_0|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$\le\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}},$$

则 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon\sqrt{1-x_0^2}}{2}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|\le\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}<\varepsilon.$$

这就证明了所需的结论.

在上面例题中，需要注意以下几点：

1. 对于δ, 我们强调其存在性. 换句话说, 对于固定的 ε,不同的方法会得出不同的δ，不存在哪一个更好的问题.

2. δ是不惟一的，一旦求出δ，那么比它更小的正数都可以充当这个角色.

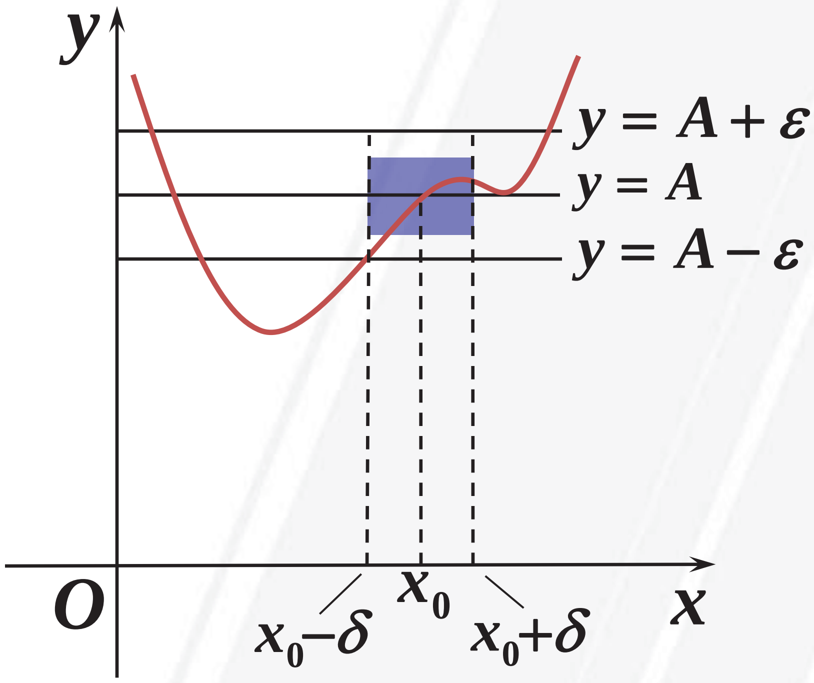
3. 正数ε 是任意的，一旦给出,它就是确定的常数. 有时为了方便, 需要让ε小于某个正数．一旦对这样的ε能找到相应的δ,那么比它大的ε，这个δ当然也能满足要求.

4. 函数极限的几何意义如图, 任给$\varepsilon > 0$,对于坐标平面上以$y = A$为中心线, 宽为2ε的窄带,可以找到

$\delta > 0$, 使得曲线段

$$y = f(x),\ \ x \in U^{\circ}(x_0, \delta)$$

落在窄带内.



单侧极限

在考虑 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 时，x 既可以从 x_0 的左侧 $(x < x_0)$ 又可以从 x_0 的右侧 $(x > x_0)$趋向于x_0. 但在某些时候,我们仅需(仅能)在 x_0的某一侧来考虑, 比如函数在定义区间的端点和分段函数的分界点等.

定义5

设 $f(x)$ 在 $U_+^\circ(x_0,\eta)$ ($U_-^\circ(x_0,\eta)$)有定义, A 为常数. 若对于任意正数ε ,存在正数 δ ($\delta<\eta$), 当 $0<x-x_0<\delta$ ($0<x_0-x<\delta$) 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 f 当 $x\to x_0^+$ ($x\to x_0^-$) 时的右(左)极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\right).$$

右极限与左极限统称为单侧极限. 为了方便起见, 有时记

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x),\quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

例3 讨论函数$\sqrt{1-x^2}$在 $x=\pm 1$ 处的单侧极限.

解 因为 $|x|\le 1,\ 1-x^2=(1+x)(1-x)\le 2(1-x)$,

所以$\forall \varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}$, 当$1-\delta<x<1$时, 有

$$\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0.$

同理可证 $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0.$

由定义3.4和定义3.5，我们不难得到：

定理3.1′

设 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

注　试比较定理 3.1 与定理 3.1′.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x=-1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

例4 证明狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数},\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$$

处处无极限.

证 对于任意的 $x_0\in\mathbf{R}$, 以及任意实数A, 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$.
对于任意的 $\delta>0$, 若$|A|\ge\dfrac{1}{2}$, 取$x^*\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, 满足

$$0<|x^*-x_0|<\delta,$$

则有

$$|D(x^*)-A|=|A|\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

若$|A|\le\dfrac{1}{2}$, 取$x^*\in\mathbf{Q}$, 满足$0<|x^*-x_0|<\delta$, 也有

$$|D(x^*)-A|=|1-A|\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

证毕.

例5 对于黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ \ (p,q)=1,\\[2ex] 0, & x=\text{无理数以及}\,0,1.\end{cases}$$

证明：$\forall x_0\in(0,1),\ \lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0.$

证 $\forall\varepsilon>0$，取一正整数 N， 使 $\dfrac{1}{N}<\varepsilon.$

因为在 $(0,1)$ 中分母小于 N 的有理数至多只有

$K=\dfrac{N(N-1)}{2}$ 个，故可设这些有理数为

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\ \ (n\le K).$$

这就是说，除了这 n 个点外，其他点的函数值都小于 ε. 所以

(1) 若 x_0 是 $x_1,\cdots,x_n$ 中的某一个，可设 $x_0 = x_i$，取 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n,\, k\ne i}\{|x_k - x_0|\}$；

(2) 若 $x_0 \notin \{x_1,\cdots,x_n\}$，则取 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n}\{|x_k - x_0|\}$.

于是，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对以上两种情形都有

$$|R(x)-0|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$.

注 有兴趣的读者可以证明：

$$\lim_{x\to 0^+} R(x) = \lim_{x\to 1^-} R(x) = 0.$$