第五讲

习题课（一）

重要内容回顾

1.罗尔中值定理;

2. 拉格朗日中值定理及其推论;

3. 函数单调性的判定;

4. 达布定理.

补充例题

例1 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$. 证明 $\exists\xi\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证 基本想法是作辅助函数，使其满足罗尔定理条件.

令

$$g(t)=\begin{cases} f(\frac{1}{t}+a-1), & t\in(0,1] \\ f(a), & t=0. \end{cases}$$

易证 $g(t)$ 满足罗尔定理的条件，从而 $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $g'(\eta)=0$, 即 $f'(\frac{1}{\eta}+a-1)\frac{-1}{\eta^2}=0$. 因为 $\frac{1}{\eta^2}\neq 0$, 所以 $f'(\frac{1}{\eta}+a-1)=0$. 令 $\xi=\frac{1}{\eta}+a-1$, 立即可得

$$f'(\xi)=0,\ \xi\in(a,+\infty).$$

例2 设 $f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且 $g'(x)\neq 0$. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 先将上述等式变形：

$$(f(\xi)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(\xi))f'(\xi).$$

令 $F(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(x))$,

则$F(a)=F(b)$,且$F(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b)上可导.

根据罗尔定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$.

即

$$(f(\xi)-f(a))g'(\xi)-(g(b)-g(\xi))f'(\xi)=0.$$

移项后即得所需结论.

例3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 证明如果 $f(x)$ 不是线性函数，则存在 $\xi_1,\ \xi_2 \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2).$$

分析 找一个辅助函数 $F(x)$，希望 $f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 恰为 $F'(x)$, 而且 $F(a)=F(b)$.

由此就变为证明存在 $\xi_1,\ \xi_2 \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0,$$

$$F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0.$$

证 根据前面分析令

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $F(a)=F(b)=0.$

$\because f(x)$不是线性函数，$\therefore F(x)$也不是线性函数，

因此 $F(x)\cancel{\equiv}0$. 从而 $\exists\, x_0\in(a,b)$, 使得 $F(x_0)\neq 0$,

不妨设 $F(x_0)>0$. 分别在 $[a,x_0]$, $[x_0,b]$ 对$F(x)$运用

拉格朗日中值定理, 于是存在 $\xi_1\in(x_0,b)$, $\xi_2\in(a,x_0)$,

使得

$$F'(\xi_1)=\frac{F(b)-F(x_0)}{b-x_0}=\frac{-F(x_0)}{b-x_0}<0,$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(x_0)-F(a)}{x_0-a}=\frac{F(x_0)}{x_0-a}>0.$$

结论得证.

例4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$.
证明 对 $\forall\, u\in(a,b), \exists \xi\in(a,b)$, 使得

$$f(u)=\frac{f''(\xi)}{2}(u-a)(u-b).$$

证 估计要用两次中值定理. 先将等式变形为

$$f''(\xi)=\frac{2f(u)}{(u-a)(u-b)},$$

令

$$F(x)=f(x)-\frac{f(u)}{(u-a)(u-b)}(x-a)(x-b),$$

则 $F(a)=f(a)=0, F(b)=f(b)=0$, 且 $F(u)=0$.
在 $[a,u]$, $[u,b]$ 上对 $F(x)$ 运用罗尔中值定理，得
$\exists\, \xi_1\in(a,u), \xi_2\in(u,b)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

而 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(u)}{(u-a)(u-b)}[(x-a)+(x-b)].$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 对 $F'(x)$ 再运用罗尔中值定理，又得

$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得

$$F''(\xi)=f''(\xi)-\frac{2f(u)}{(u-a)(u-b)}=0.$$

证毕

$$F(x)=f(x)-\frac{f(u)}{(u-a)(u-b)}(x-a)(x-b),$$

$$f(u)=\frac{f''(\xi)}{2}(u-a)(u-b).$$

例5 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上可导，在(a,b)上二阶可导. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使得

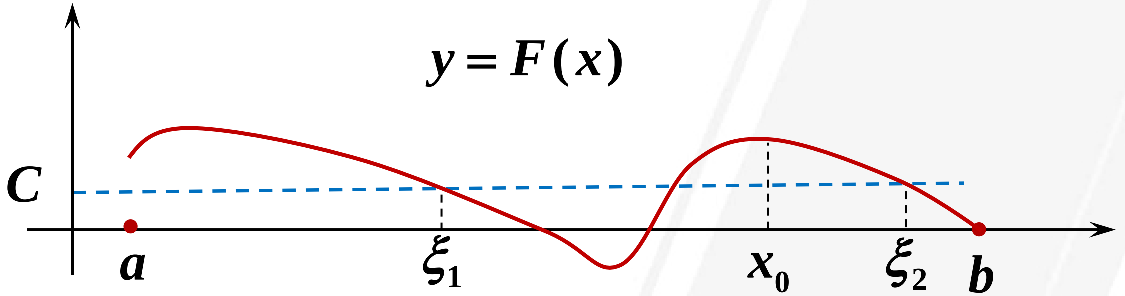
$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a). \qquad (*)$$

证 令 $F(x)=f'(x)-f'(a)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)$,

则 $F(a)=F(b)=0$. 若$F(x)\equiv 0$, 则$(*)$自然成立.

若$F(x)\not\equiv 0$, $\exists\, x_0\in(a,b)$, 使得 $F(x_0)>0$ (不妨设).

对于 $C=\dfrac{F(x_0)}{2}$, $0<C<F(x_0)$, 由导数介值定理,



知 $\exists\,\xi_1\in(a,x_0),\ \xi_2\in(x_0,b)$, 使得 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=C$.

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 对 $F(x)$ 使用罗尔中值定理，得到

$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f''(\xi)-\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}=0.$$

移项后即为所证.

$$F(x)=f'(x)-f'(a)-\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a),$$

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a). \qquad (*)$$

例6 利用函数单调性，证明不等式

$$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}\quad (x>0,x\neq 1).$$

证 当$x<1$时，不等式可以化为 $\ln x>\frac{x-1}{\sqrt{x}}$;

当$x>1$时，不等式为 $\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

因此，令 $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x\quad (x>0)$,

则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续、可导，且

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2x-x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}\geq 0.$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增. 因 $f(1)=0$, 故

当 $0<x<1$ 时, $f(x)<f(1)=0$; 当 $x>1$ 时, $f(x)>f(1)=0$.

即 $\ln x>\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\quad(0<x<1)$; $\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\quad(x>1)$.

也就是

$$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(x>0,x\neq 1).$$

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x,\quad(x>0)$$

$$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(x>0,x\neq 1)$$