第十四讲

泰勒公式在近似计算中的应用

泰勒公式在近似计算中的应用

例5 (1) 计算 e 的值,使其误差不超过 10^{-6}.

(2) 证明 e 是无理数.

解 由公式 (i) 可知

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

因为 $0 < \theta < 1, 2 < e < 3$，当$n = 9$时, 有

$$R_9(1) < \frac{3}{10!} = \frac{3}{3628800} < 10^{-6}.$$

于是

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718281,$$

其误差不超过 10^{-6}.

下证 e 是无理数. 这是因为

$$n!\mathrm{e}-n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}. \qquad (7)$$

倘若 $\mathrm{e}=\dfrac{p}{q}$, $(p,q)=1$ 是有理数. 取 $n\geq q$ 且 $n\geq 3$,

则 (7) 式左边是整数，由于 $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}<\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}<\dfrac{3}{n+1}$,

当$n>2$时(7)式右边不是整数. 矛盾.

所以 e 是一个无理数.

(同样可证明 sin1, cos1 都不是有理数.)

例 6 计算 ln2 的值, 使其误差不超过10^{-4}.

解 我们自然会想到利用公式 (iv)，此时用 $x = 1$ 代入，它的余项是

$$R_n(1) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

要确保 $|R(1)| < 0.0001$，必须满足 $n > 10000$.

显然这样的计算量太大, 所以必须寻找新的方法.

现考虑函数

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x},\qquad -1<x<1.$$

因为 $\ln(1+x)$ 的 n 阶泰勒多项式为

$$x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},$$

$\ln(1-x)$ 的 n 阶泰勒多项式为

$$-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n},$$

所以 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的 $2n$ 阶泰勒多项式为

$$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right).$$

而

$$f^{(2n+1)}(x)=(2n)!(1+x)^{-2n-1}+(2n)!(1-x)^{-2n-1}$$

$$=\frac{(2n)!}{(1+x)^{2n+1}}+\frac{(2n)!}{(1-x)^{2n+1}},$$

于是

$$R_{2n}(x)=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+1}}+\frac{1}{(1-\theta x)^{2n+1}}\right]x^{2n+1}.$$

令 $\dfrac{1+x}{1-x}=2$, 解得 $x=\dfrac{1}{3}$. 要使

$$R_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}<0.0001,$$

只要取 $n=6$, 便得到

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^{3}}+\cdots+\frac{1}{11\times 3^{11}}\right)=0.6931,$$

其误差不超过0.0001 .

复习思考题

1. 若$T_n(x)$是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 n 阶泰勒多项式，那么，在什么条件下 $T_n(x^2)$ 一定是 $f(x^2)$ 的 $2n$ 阶泰勒多项式?