第三讲

拉格朗日定理

应用举例

例2 设 $f(x)$ 在区间 I 上可微, 且 $|f'(x)| \le K$, 则函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

证 对于任意正数 ε , 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K+1}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 便有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le |f'(\xi)||x_2 - x_1|$$

$$\le \frac{K\varepsilon}{K+1} < \varepsilon, \quad x_1 < \xi < x_2,$$

故 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),\ a < \xi < b.$$

例3 证明: $\arctan b - \arctan a \le b - a \quad (a < b).$

证 设 $f(x) = \arctan x$. 显然 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，故有

$$\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$$

$$\le b - a, \quad a < \xi < b.$$

注 例3中的不等号可以成为严格的.

事实上, 当 $0 \le a < b$ 和 $a < b \le 0$时，ξ 显然不为零, 严格不等式成立.

当 $a < 0 < b$ 时，

存在 $\xi_1 \in (0, b), \xi_2 \in (a, 0)$，使得

$$\arctan b - \arctan a$$

$$= \arctan b - \arctan 0 + \arctan 0 - \arctan a$$

$$= \frac{1}{1+\xi_1^2} b + \frac{1}{1+\xi_2^2}(-a) < b - a.$$

例4.证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1,1].$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在 $(-1,1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论1可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C,$

$x \in (-1,1).$

令 $x = 0$, 得 $C = \dfrac{\pi}{2}.$

又 $f(\pm 1) = \dfrac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1,1]$ 上成立.

注　要证 $x \in I$ 时 $f(x)=C_0$，只需证在 I 上 $f'(x)\equiv 0$，且 $\exists\, x_0 \in I$，使 $f(x_0)=C_0$.

自证　$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$，　$x \in (-\infty, +\infty)$

例5 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $f'(x) \geq c > 0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

证 任取 $x > a$, 由拉格朗日中值公式, 得到

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \geq c(x-a),$$

从而

$$f(x) \geq f(a) + c(x-a).$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(a)+c(x-a)) = +\infty$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

例6 求分段函数 $f(x)=\begin{cases} x+\sin x^2, & x\le 0, \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$ 的导数.

解 首先易见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并且

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x\cos x, & x<0, \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0. \end{cases}$$

接下去利用导数极限定理求 $x=0$ 处的导数. 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+2x\cos x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1.$$

由导数极限定理，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1.$