第四讲

习题课

重要内容回顾

1. 区间套定理；
2. 聚点定理；
3. 有限覆盖定理；
4. 实数完备性定理的等价性；

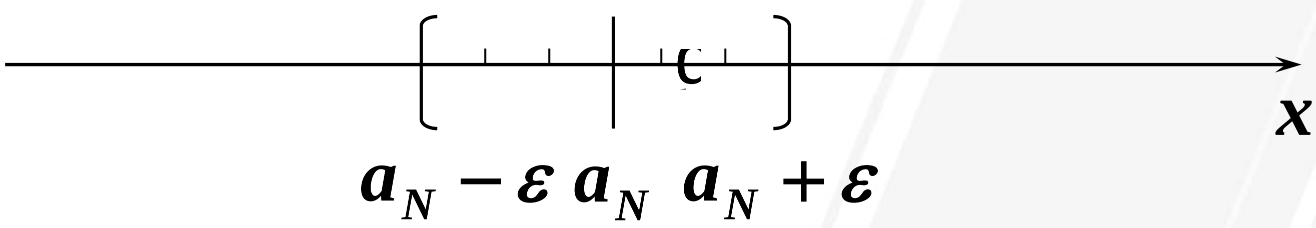
补充例题

例1 用区间套定理证明柯西收敛准则. 即

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 N, 当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

证明充分性 由题设, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, $n \geq N$时, $|a_n - a_N| < \varepsilon$. 即当 $n > N$ 时, $a_n \in (a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon)$.

(注意 : 这并不能说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_N$.)



令$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 存在N_1, $n>N_1$时， $a_n\in\left(a_{N_1}-\dfrac{1}{2},a_{N_1}+\dfrac{1}{2}\right)$,

取$[a_1,b_1]=\left[a_{N_1}-\dfrac{1}{2},a_{N_1}+\dfrac{1}{2}\right]$. 再令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$,

存在$N_2(\geq N_1)$, $n>N_2$时,

$$a_n\in\left(a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}\right),$$

取$[a_2,b_2]=[a_1,b_1]\cap\left[a_{N_2}-\dfrac{1}{2^2},a_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}\right]$. 显然有

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2],\ b_2-a_2\leq\frac{1}{2},$$

并且当$n>N_2$时, $a_n\in[a_2,b_2]$, $\cdots\cdots$,

令 $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$, 存在 $N_k (\geq N_{k-1})$, $n > N_k$ 时,

$$a_n \in \left(a_{N_k} - \frac{1}{2^k},\ a_{N_k} + \frac{1}{2^k} \right).$$

取 $[a_k,\ b_k] = [a_{k-1}, b_{k-1}] \cap \left[a_{N_k} - \dfrac{1}{2^k}, a_{N_k} + \dfrac{1}{2^k} \right]$, 有

$[a_{k-1},\ b_{k-1}] \supset [a_k,\ b_k]$, $b_k - a_k \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$,

$a_n \in [a_k, b_k]$, $n > N_k$. $\cdots\cdots$

这样就得到一列闭区间 $\{[a_k,\ b_k]\}$, 满足

(i) $[a_k,\ b_k] \supset [a_{k+1},\ b_{k+1}]$, $k = 1, 2, \cdots$;

(ii) $b_k - a_k \leq \dfrac{1}{2^{k-1}} \to 0$, $k \to \infty$;

(iii) $\forall k \in \mathrm{N}_+$, 当 $n > N_k$ 时, $a_n \in [a_k, b_k]$.

由区间套定理, 存在唯一的 $\xi \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, 3 \cdots$.

根据定理1的推论，对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在k_0，使

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon),$$

由(iii), 当 $n > N_{k_0}$ 时,

$$a_n \in [a_{k_0}, b_{k_0}] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon),$$

所以 $|a_n - \xi| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \xi.$$

例2 用致密性定理证明确界定理.

证 若非空数集 S 有上界, 设 b 是 S 的一个上界.

$\forall a$, 使得 a 不是 S 的上界, 有 $a < b$. 对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$, 将 $[a,b]$ n 等分, 则存在 i, 使得分点 x_i 不是 S 的上界, 而分点 x_{i+1} 是 S 的上界.

令 $a_n = x_i$, $b_n = x_{i+1}$, $a \le b_n \le b$, $\{b_n\}$ 有界. 由致密性定理存在收敛子列 $\{b_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = A$, 于是 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

(1) $\forall s \in S$, b_n 为 S 的上界, 故有 $s \le b_n$. 从而

$A = \lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} \ge s$, 即 A 为 S 的上界.

(2) 要证 $\forall \varepsilon > 0, \exists s' \in S$, 使得 $s' > A - \varepsilon$.

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_k}$, 使得 $A - \varepsilon < a_{n_k}$.

因为 a_{n_k} 不是 S 的上界, 所以 $\exists s' \in S$, 满足 $a_{n_k} < s'$, 于是

$$A - \varepsilon < a_{n_k} < s' \leq A.$$

这说明 $A = \sup S$.

例3 用有限覆盖定理证明根的存在性定理.

证(用反证法). 设 f 在区间$[a,b]$上连续, $f(a)f(b)<0$,

不妨设 $f(a)<0,\ f(b)>0.$

如果 f 在$[a,b]$上没有根, 则对$\forall\, x\in[a,b],\ f(x)\neq 0$.

由连续函数的局部保号性, $\exists\varepsilon_x>0$, 使得对一切$x'\in$

$U(x;\varepsilon_x)\cap[a,b],\ f(x')$与$f(x)$同号. 令

$$H=\{U_x=U(x;\varepsilon_x)\,|\,x\in[a,b]\},$$

则H是$[a,b]$的一个开覆盖,于是存在有限多个开区间

$\{U_{x_i}\,|\,i=1,2\cdots n\}$覆盖了$[a,b]$.

不妨设这些区间互不包含，且从左到右依次覆盖区间 $[a,b]$，于是

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

由于 $a \in U_{x_1}, b \in U_{x_n}$，因此 $f(x_1) < 0, f(x_n) > 0$.

设 $f(x_i) < 0, f(x_{i+1}) > 0$，因为 $U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq \varnothing$,

$\forall\, x \in U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}}$，由 $x \in U_{x_i}$，$f(x) < 0$；再由 $x \in U_{x_{i+1}}$，$f(x) > 0$.

由此产生矛盾，矛盾说明函数 f 在 $[a, b]$ 上有根.