# CH3 线性方程组解法

## /* Direct Method for Solving Linear Systems */

§1 消 去 法

§2 矩阵分解法

§3 方程组的性态和条件数

§4 迭代法

# §1 消去法

## 一、高斯顺序消去法 /* Gaussian Elimination */

□ 例题 求解 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

解 **Step1:**消元

$$\overline{A} = (A, b) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & -1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 0.5r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{5}{3\times 2} r_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

**Step2:**回代 $\begin{cases} x_3 = -6/(-2) = 3 \\ x_2 = (-3 + 3\times 3)/3 = 2 \\ x_1 = (7 - 1\times 3 - 1\times 2)/2 = 1 \end{cases}$

# 1. 计算机上所用的公式

求解方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases}$$

下面研究它的计算规律：

1)消元 记 $A^{(0)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2k}^{(0)} & a_{2,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & a_{2,n+1}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{k1}^{(0)} & a_{k2}^{(0)} & \cdots & a_{kk}^{(0)} & a_{k,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{kn}^{(0)} & a_{k,n+1}^{(0)} \\ a_{k+1,1}^{(0)} & a_{k+1,2}^{(0)} & \cdots & a_{k+1,k}^{(0)} & a_{k+1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(0)} & a_{k+1,n+1}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nk}^{(0)} & a_{n,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & a_{n,n+1}^{(0)} \end{pmatrix}$

**Step 1:** 假设$a_{11}^{(0)} \neq 0$, 令$l_{i1} = a_{i1}^{(0)} / a_{11}^{(0)} \quad (i = 2, ..., n)$

$$A^{(0)} \xrightarrow[i\,=\,2,\,\dots,\,n]{r_i \,-\, l_{i1} r_1} \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{k2}^{(1)} & \cdots & a_{kk}^{(1)} & a_{k,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{kn}^{(1)} & a_{k,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{k+1,2}^{(1)} & \cdots & a_{k+1,k}^{(1)} & a_{k+1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(1)} & a_{k+1,n+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} & a_{n,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

假设第$k-1$步消元后

$$A^{(k-1)}=\left(\begin{array}{ccccccc:c}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\
0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} & a_{k+1,n+1}^{(k-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} & a_{n,n+1}^{(k-1)}
\end{array}\right)$$

**Step k：** 若$a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$，计算$l_{ik}=a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$ $(i=k+1,\ldots,n)$

以及$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-l_{ik}a_{kj}^{(k-1)}$ $(i=k+1,\ldots,n;\ j=k+1,\ldots,n+1)$

$$A^{(k-1)}\xrightarrow[i=k+1,\ldots,n]{r_i-l_{ik}r_k}\left(\begin{array}{ccccccc:c}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)}
\end{array}\right)\triangleq A^{(k)}$$

## Step $n$-1：消元结束，A化为上三角矩阵

$$
A^{(n-1)} = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)}
\end{pmatrix}
$$

在实际编程中，为了节省内存，不引入新变量，消元过程记为：

$k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad a_{kk} \neq 0$

$i = k+1, \ldots, n$

$l_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \Rightarrow a_{ik}$

$j = k+1, \ldots, n+1$

$a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \Rightarrow a_{ij}$

消元结束后，增广矩阵化为如下“形式”

$$\begin{bmatrix}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\
l_{21} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\
l_{k1} & l_{k2} & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\
l_{k+1,1} & l_{k+1.2} & \cdots & l_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nk} & l_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)}
\end{bmatrix}$$

## 2) 回代

$$\begin{cases}
x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} / a_{nn}^{n-1} \\
x_k = (a_{k,n+1}^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j) / a_{kk}^{(k-1)} \\
(k = n-1, \cdots, 1)
\end{cases}
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & \boxed{x_1} \\
l_{21} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & x_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\
l_{k1} & l_{k2} & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & x_{k-1} \\
l_{k+1,1} & l_{k+1.2} & \cdots & l_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & x_k \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nk} & l_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & x_n
\end{bmatrix}$$

# 一个模拟计算机求解的例子

求解 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$ 解 $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1/1 & 1 & -2 & 3 & -7 \\ -2/1 & -1 & 4 & -3 & 13 \\ 3/1 & -2 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -7 \\ -2 & -1/1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2/1 & -5 & 4 & -19 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -7 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -5/2 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -5/2 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

## 2. 消去法成立的条件

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0, (k = 1, 2\cdots, n-1)$$

动态变化!

## 3. 计算量 $\dfrac{n^3}{3} + n^2 - \dfrac{n}{3}$ 次乘法

例1 单精度求解 $\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

精确解：$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{1-10^{-9}} = 1.00000000100\ldots \\ x_2 = 2 - x_1 = 0.99999999899\ldots \end{cases}$

☞高斯消去法

$$A^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 10^9 r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1\times 10^9 & 2 - 1\times 10^9 \end{array}\right) = A^{(1)}$$ (手算的结果)

大数吃小数！

$$\approx \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{array}\right) = \tilde{A}^{(1)}$$ (计算机算的结果)

$$\Rightarrow \begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ 10^9 x_2 = 10^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

×：结果不可靠!

原因：主元$(a_{11})$太小，方法不稳定！

☞解决办法：先换行，再消元求解

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}10^{-9} & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 10^{-9} & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{消元}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2=1\,,\ x_1=1$

✓：结果可靠！

## 二、高斯列主元消去法

- 消元

对$k=1,2,\cdots,n$，进行：

步1：选主元(第$k$列中第$k$个至第$n$个元素中绝对值较大者)

步2：将主元所在行与第$k$行互换

步3：消元

- 回代求解（同高斯消去法）

例2 用列主元素法求解 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$（计算过程中保留3位有效数字）

解

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 2.333 & 5 \\ 0 & \boxed{1.167} & 0.944 & 5.167 \end{pmatrix}$$

列主元素法

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \boxed{1.167} & 0.944 & 5.167 \\ 0 & -1 & 2.333 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2次消元}} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \boxed{1.167} & 0.944 & 5.167 \\ 0 & 0 & 3.142 & 9.428 \end{pmatrix}$$

由回代过程，得解：$x_3 = 3.001$，$x_2 = 2.000$，$x_1 = 1.000$

## 另解：全主元素法(了解)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

全主元素法

$$\xrightarrow{\text{第1次消元}} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \boxed{2.333} & 5 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & -1 & 3 & -15 \\ 0 & \boxed{2.333} & -1 & 5 \\ 0 & 0.944 & 1.167 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2次消元}} \begin{pmatrix} \boxed{-18} & -1 & 3 & -15 \\ 0 & \boxed{2.333} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1.572 & 3.144 \end{pmatrix}$$

由回代过程，得解：$x_2 = 2.000$，$x_3 = 3.000$，$x_1 = 1.000$ 精确解！

# 三、三对角方程组的追赶法

**1** 定义：三对角方程组

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \quad + a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \\ \qquad a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ \qquad a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

**2** 三对角方程的应用

样条函数的求解、微分方程的差分方程等！

**3** 求解方法：追赶法

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \quad\ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

$$x_1 + \frac{c_1}{b_1}x_2 = \frac{d_1}{b_1}$$

记：$q_1 = \dfrac{c_1}{b_1},\ p_1 = \dfrac{d_1}{b_1}$

将$x_1 = p_1 - q_1x_2$代入，得：

$$(b_2 - q_1a_2)x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2p_1$$

$$\Leftrightarrow x_2 + \frac{c_2}{b_2 - q_1a_2}x_3 = \frac{d_2 - a_2p_1}{b_2 - q_1a_2}$$

记$\begin{cases} t_2 = b_2 - q_1a_2 \\ q_2 = \dfrac{c_2}{t_2},\quad p_2 = \dfrac{d_2 - a_2p_1}{t_2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + q_1x_2 = p_1 \\ x_2 + q_2x_3 = p_2 \\ x_3 + q_3x_4 = p_3 \\ \cdots \qquad \cdots \\ x_{n-1} + q_{n-1}x_n = p_{n-1} \\ x_n = p_n \end{cases}$$

依此规律，进行到底！！

➢. 计算规律：
$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{c_1}{b_1},\ p_1 = \dfrac{d_1}{b_1} \\ \begin{cases} t_k = b_k - q_{k-1}a_k \\ q_k = \dfrac{c_k}{t_k},\quad p_k = \dfrac{d_k - a_k p_{k-1}}{t_k} (k = 2,\dots,n) \end{cases} \end{cases}$$

➢. 消元结束后：
$$\begin{cases} x_1 + q_1 x_2 = p_1 \\ x_2 + q_2 x_3 = p_2 \\ x_3 + q_3 x_4 = p_3 \\ \quad\cdots \quad \cdots \\ x_{n-1} + q_{n-1} x_n = p_{n-1} \\ x_n = p_n \end{cases}$$

➢. 回代求解：
$$\begin{cases} x_n = p_n \\ x_k = p_k - q_k x_{k+1}\ (k = n-1,\cdots,1) \end{cases}$$

## 4 追赶法成立条件(P45-定理1，了解、自学)

若三对角方程组系数矩阵满足：

1)所有$a_k,b_k,c_k$均不为零；

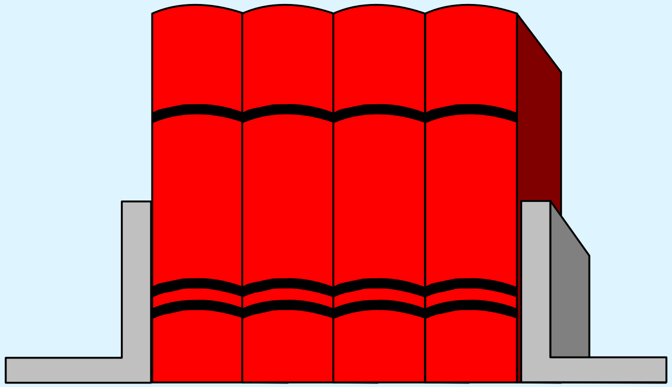
2)$|b_k|\geq|a_k|+|c_k|$ $(k=1,2,\cdots,n)$,且其中至少有一个取不等号。

则追赶法计算过程中每步的分母$t_k=b_k-q_{k-1}a_k$满足

$$|t_k|=|b_k-q_{k-1}a_k|\geq|b_k|-|a_k|>0 \quad (k=2,3,\cdots,n)$$

因此追赶法能进行到底。

# §2 矩阵分解法



# 一　容易求解的方程组$Ax = b$

✍ $A$为下三角结构

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

则$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_k = b_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \, (k = 2, \cdots, n) \end{cases}$

✍ $A$为上三角结构

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

则$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_k = (b_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j) / a_{kk} \, (k = n-1, \cdots, 1) \end{cases}$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \triangleq [A \mid b]$$

设 $a_{11} \neq 0, l_{i1} = a_{i1} / a_{11}$

$r_i - l_{i1} r_1 \ (i = 2, 3)$

记 $M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -l_{21} & 1 & \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M^{(1)}(A \mid b) = (A^{(1)} \mid b^{(1)})$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{bmatrix} \triangleq [A^{(1)} \mid b^{(1)}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{bmatrix} \triangleq \left[ A^{(1)} \mid b^{(1)} \right]$$

设 $a_{22} \neq 0, l_{32} = a_{32} / a_{22}$

$\downarrow r_3 - l_{32} r_2$

记 $M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -l_{32} & 1 \end{bmatrix}$

$$M^{(2)}(A^{(1)} \mid b^{(1)}) = (A^{(2)} \mid b^{(2)})$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{bmatrix} \triangleq \left[ A^{(2)} \mid b^{(2)} \right] \triangleq [U \mid \vec{y}]$$

即 $M^{(2)} M^{(1)}(A \mid b) = M^{(2)}(A^{(1)} \mid b^{(1)}) = (U \mid \vec{y})$

$$M^{(2)}M^{(1)}(A\,|\,b) = M^{(2)}(A^{(1)}\,|\,b^{(1)}) = (U\,|\,\vec{y})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M^{(2)}M^{(1)}A = U \\ M^{(2)}M^{(1)}\vec{b} = \vec{y} \end{cases}$$

令 $L = [M^{(2)}M^{(1)}]^{-1} = (M^{(1)})^{-1}(M^{(2)})^{-1}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

故 $A = LU$ 且 $L\vec{y} = \vec{b}$ 则消元过程等价关系

$$A\vec{x} = \vec{b} \xrightleftharpoons{A=LU} LU\vec{x} = \vec{b} \xrightleftharpoons{\vec{y}=U\vec{x}} \begin{cases} L\vec{y} = b \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

# 二　$LU$分解法

☝.基本思想　对$Ax=b$,如果$A$可进行如下分解：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \triangleq LU$$

则

$$Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$$

从而易得

$$\begin{cases} y_1=b_1 \\ y_k=b_k-\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j \,(k=2,\cdots,n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n=y_n/u_{nn} \\ x_k=(y_k-\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j)/u_{kk}\,(k=n-1,\cdots,1) \end{cases}$$

# .计算公式

**1 可解性**

若假设$A=LU$,则由$a_{ij}=\sum_{s=1}^{n} l_{is}u_{sj}$可确定一个含有$n^2$个方程

$n^2$个未知数的方程组.

所以，在一定条件下，$l_{ij},u_{ij}$可解。

**2 一个例子：**

$$对A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -4 \\ 8 & 19 & -4 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & -9 \\ 4 & 5 & 0 & -14 \end{bmatrix}进行LU分解.$$

解 设$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1 & -4\\ 8 & 19 & -4 & -11\\ 0 & -6 & 2 & -9\\ 4 & 5 & 0 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ & u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ & & u_{33} & u_{34}\\ & & & u_{44}\end{bmatrix}$

则 $a_{11}=2=1\times u_{11}\Rightarrow u_{11}=2$

$a_{12}=4=u_{12}\quad\Rightarrow u_{12}=4$

$u_{13}=-1,\quad u_{14}=-4$

$a_{21}=l_{21}\times u_{11}+1\times 0=8$

$$\Rightarrow l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}=4$$

$a_{31}=l_{31}\times u_{11}\ \Rightarrow l_{31}=\dfrac{a_{31}}{u_{11}}=0$

$a_{41}=l_{41}\times u_{11}\ \Rightarrow l_{41}=\dfrac{a_{41}}{u_{11}}=2$

$a_{22}=l_{21}\times u_{12}+u_{22}=19$

$\Rightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=3$

$a_{23}=l_{21}\times u_{13}+u_{23}=-4$

$\Rightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}\times u_{13}=0$

$a_{24}=l_{21}\times u_{14}+u_{24}$

$\Rightarrow u_{24}=a_{24}-l_{21}\times u_{14}=5$

$a_{32}=l_{31}\times u_{12}+l_{32}u_{22}$

$\Rightarrow l_{32}=(a_{32}-l_{31}\times u_{12})/u_{22}=-2$

$l_{42}=-1,\quad u_{33}=2,\quad u_{34}=1,$

$l_{43}=1,\quad u_{44}=-2$

## 3 计算公式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{a_{nr}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ l_{r1} & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nr} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & u_{rr} & \cdots & u_{rn} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$A$的第一行元素$a_{1j}$满足：$a_{1j}=u_{1j}\quad j=1,2,\cdots,n$

$$\Rightarrow u_{1j}=a_{1j}, j=1,\cdots,n \quad -(1)$$

$A$的第一列元素$a_{i1}$满足：$a_{i1}=l_{i1}u_{11}\quad i=2,3,\cdots,n$

$$\Rightarrow l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}, i=2,\cdots,n \quad -(2)$$

$A$的第$r$行元素主对角线以右元 素$a_{rj}$ $(j=r,\cdots,n)$为

$$a_{rj}=\sum_{k=1}^{r}l_{rk}u_{kj}=\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{kj}+u_{rj}$$

$$\Rightarrow u_{rj}=a_{rj}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{kj},\quad \begin{matrix} r=2,\cdots,n \\ j=r,\cdots,n \end{matrix} \quad -(3)$$

$A$的第$r$列元素主对角线以下元素$a_{ir}(i=r+1,\cdots,n)$为

$$a_{ir}=\sum_{k=1}^{r}l_{ik}u_{kr}=\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}+l_{ir}u_{rr}$$

$$\Rightarrow l_{ir}=\frac{a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}},\quad \begin{matrix} r=2,\cdots,n-1 \\ i=r+1,\cdots,n \end{matrix} \quad -(4)$$

## •紧凑格式

$$
\begin{array}{l|l|l}
\multicolumn{3}{l}{(1)\quad u_{11}\quad u_{12}\quad u_{13}\quad \cdots\quad \cdots\quad u_{1n}} \\
\hline
(2)\quad l_{21} & \multicolumn{2}{l}{(3)\quad u_{22}\quad u_{23}\quad \cdots\quad \cdots\quad u_{2n}} \\
\cline{2-3}
\qquad l_{31} & (4)\quad l_{32} & \ddots \\
\qquad \vdots & \qquad l_{42} & \quad \ddots \\
 & \qquad \vdots & \qquad \ddots \\
\qquad l_{n1} & \qquad l_{n2} &
\end{array}
$$

计算规律：

1) 计算$u_{ij}$时,用$a_{ij}$减去位于同一列的$u_{kj}$与同一行 的$l_{ik}$乘积之和；

2) 计算$l_{ij}$时,规律同上并除以$u_{kk}$.

例1　用$LU$分解法求解方程组 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$

解　(1) 求$A$的$LU$分解

| | | |
|---|---|---|
| $u_{11} = 2$ | $u_{12} = 1$ | $u_{13} = 1$ |
| $l_{21} = \frac{4}{2} = 2$ | $u_{22} = 5 - 2\times 1 = 3$ | $u_{23} = -1 - 2\times 1 = -3$ |
| $l_{31} = \frac{1}{2}$ | $l_{32} = \frac{-2 - 1\times 1/2}{3} = -\frac{5}{6}$ | $u_{33} = 1 - \frac{1}{2}\times 1 - \frac{5}{2} = -2$ |

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1/2 & -5/6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & -3 & -3 \\ & & -2 \end{pmatrix} = LU$$

(2) $A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} L\vec{y}=\vec{b} \\ U\vec{x}=\vec{y} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1/2 & -5/6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & -3 & -3 \\ & & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**练习** 用$LU$分解法求解 $\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$。

解

$$A=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}=LU$$

$$Ax=b\Leftrightarrow LUx=b\Leftrightarrow\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$$

由 $Ly=b$，得 $y=(5,3,6,4)^T$

由 $Ux=y$，得$x=(1,1,2,2)^T$

**例2** 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\-2&-3&2&-5\\3&1&2&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\\10\end{pmatrix}$。

用$LU$分解法分别求解：(1) $Ax=b$; (2) $A^2z=b$


解　先求$A$的$LU$分解：

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\-2&-1&1&\\3&-2&-5/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\&1&-2&3\\&&2&0\\&&&4\end{pmatrix}$$

$$(1)\ Ax=b\Leftrightarrow LUx=b\Leftrightarrow\begin{cases}Ly=b\Rightarrow y=(5,\ -7,\ 6,\ -4)^T\\Ux=y\Rightarrow x=(1,\ 2,\ 3,\ -1)^T\end{cases}$$

注意：由消去法 $\overline{A}=(A,b)\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&5\\1&1&-2&3&-7\\-2&-1&2&0&6\\3&-2&-5/2&4&-4\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\-2&-1&1&\\3&-2&-5/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\&1&-2&3\\&&2&0\\&&&4\end{pmatrix}$$

$$(2)\ A^2z=b\Leftrightarrow A(Az)=b$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Ax=b\\Az=x\end{cases}\qquad \boxed{\Rightarrow x=(1,\ 2,\ 3,\ -1)^T}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Ax=b\\LUz=x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Ax=b\\Lw=x\\Uz=w\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\boxed{\Rightarrow w=(1,\ 1,\ 6,\ 13)^T}\\ \boxed{\Rightarrow z=(-2.5,\ -2.75,\ 3,\ 3.25)^T}\end{array}$$

## .几点备注

(1) LU分解法实际上是高斯消去法，是其矩阵形式。

(2) LU分解法在解系数矩阵相同的多个方程时，

具有节省计算量的明显优势。

(3) 非奇异矩阵$A$能分解为LU的充要条件是$A$的顺序

主子式不为0(定理2).

(4) 若非奇异矩阵$A$有分解,此分解是唯一的.

(5) 选主元的LU分解法可参见[4].

# 三　乔累斯基分解法

**基本思想**　设$A$对称正定，且$A=LU$,将$U$进一步分解：

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \dfrac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \dfrac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1\end{bmatrix} \triangleq LDM$$

$\because A$是对称矩阵$(A=A^T)$

$\therefore LDM=(LDM)^T=M^TD^TL^T=M^T(DL^T)$ 其中：$M^T$为下三角，$DL^T$为上三角。

$\therefore$由$LU$分解的唯一性知：$M^T=L$, 即$M=L^T$

$\therefore A=LDL^T$

## 3.计算公式

设$A$对称正定，且

$$A = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ & 1 & \dots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

其中，$d_i$和$l_{ij}$计算公式为：$\begin{cases} i = 1,2,\cdots,n \\ d_i = a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} d_s l_{is}^2 \\ l_{ik} = \left( a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} d_s l_{is} l_{ks} \right) \Big/ d_k \quad (k = 1,\cdots,i-1) \end{cases}$

此时，$Ax = b \Leftrightarrow LDL^T x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ DL^T x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = D^{-1} y \end{cases}$

求解公式为：$\begin{cases} y_k = b_k - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} y_s \quad (k = 1,2,\cdots,n) \\ x_k = \dfrac{y_k}{d_k} - \sum_{s=k+1}^{n} l_{sk} x_s \quad (k = n,n-1,\cdots,1) \end{cases}$

例3 用$LDL^T$分解法求解方程组 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix}$

解 设 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{pmatrix}$

根据矩阵乘法，得 $d_1 = 3,\ d_2 = 2,\ d_3 = 2/3$

$$l_{21} = 1,\ l_{31} = 5/3,\ l_{32} = 2$$

由 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 5/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow y = (10,\ 6,\ 4/3)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & \\ & d_2^{-1} & \\ & & d_3^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (2,\ -1,\ 1)^T$$

# 平方根法

结论：若$A$对称正定，则有下三角矩阵$R$，使得

$$A=RR^T$$

$$A = LDL^T \boxed{= L\bar{D}\bar{D}L^T = L\bar{D}\left(L\bar{D}\right)^{\mathrm{T}} \triangleq RR^T}$$

$$D = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \triangleq \bar{D}\bar{D}, \bar{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}$$

计算：
$$\begin{cases} r_{kk} = (a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} r_{kr}{}^2)^{1/2} \\ r_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} r_{ik} r_{kr}\right) \Big/ r_{kk}, i = k+1, \cdots, n \end{cases}$$

称为平方根法，
因为带了开方运算，
因此不常用

# §3 方程组的性态和条件数

❖ 回顾：迭代法求非性方程的根：$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$

构造迭代序列$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，如果$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$（存在），则有$x^*=\varphi(x^*)$。

$x_n \to x^*$：$\forall \varepsilon>0, \exists N$，当$n>N$时，有$\left|x_n - x^*\right| < \varepsilon$.

❖ 一个关键概念：距离！

$\forall x, y \in R^1$，$x, y$之间的距离为：$d(x,y)=\left|x-y\right|$

❖ 问题：$R^n$中的距离如何定义？

❖ 考察$|x|$具有的性质：

1. $|x| \geq 0$，且$|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;

2. 对$\forall \lambda \in R$，$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$;

3. $|x+y| \leq |x|+|y|$;

❖ 推广…

# 一、范数

## ❐. 向量范数

### 1. 定义

对$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$，若对应正实数$\|x\|$，满足：

1） $\|x\|\geq 0$, 且$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;

2） $\forall\lambda\in R$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;

3） $\forall y\in R^n$, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$。

则称$\|\vec{x}\|$为向量$x$的范数或模。

注：在$R^n$中引入了范数，相当于引入了距离的概念！

## 2. 常用的向量范数

设$x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in R^n$，定义：

1）$\infty-$范数：$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

2）$1-$范数：$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

3）$2-$范数：$\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$

验证：$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$满足范数定义。

$1^0$. 显然$\|x\|_\infty\ge 0$, 且$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|=0\Leftrightarrow x=0$

$2^0$. $\forall a\in R$, $\|ax\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|ax_i|=|a|\cdot\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|=|a|\cdot\|x\|_\infty$

$3^0$. $\forall x,y\in R^n, x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\in R^n$,

$$\|x+y\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i+y_i|\le\max_{1\le i\le n}\left(|x_i|+|y_i|\right)\le\max_{1\le i\le n}|x_i|+\max_{1\le i\le n}|y_i|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

**例1** 设$x=(1,-2,3,-4)^T$，则$\|x\|_\infty=$ __4__ ，$\|x\|_1=$ __10__ ，$\|x\|_2=$ __$\sqrt{30}$__ .

**例2** 设$A_{n\times n}$可逆，$\|\cdot\|_\alpha$ 是$R^n$上一个范数。

证明：$\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha$ 也是$R^n$上一个范数。

证明 1）显然，$\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha\ge 0$; 且

$\because A$可逆

$$\|x\|_\beta=0\Leftrightarrow\|Ax\|_\alpha=0\Leftrightarrow Ax=0\Leftrightarrow x=0$$

2）对$\forall\lambda\in R$, $\|\lambda x\|_\beta=\|\lambda Ax\|_\alpha=|\lambda|\cdot\|Ax\|_\alpha=|\lambda|\cdot\|x\|_\beta$;

3）$\|x+y\|_\beta=\|A(x+y)\|_\alpha=\|Ax+Ay\|_\alpha\le\|Ax\|_\alpha+\|Ay\|_\alpha$

$$=\|x\|_\beta+\|y\|_\beta$$

$\therefore\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha$ 也是$R^n$上一个范数。

例3 设$A_{n\times n}$是实对称正定矩阵，证明：$\| x \|_A = \sqrt{x^T Ax}$是$R^n$的一个范数。

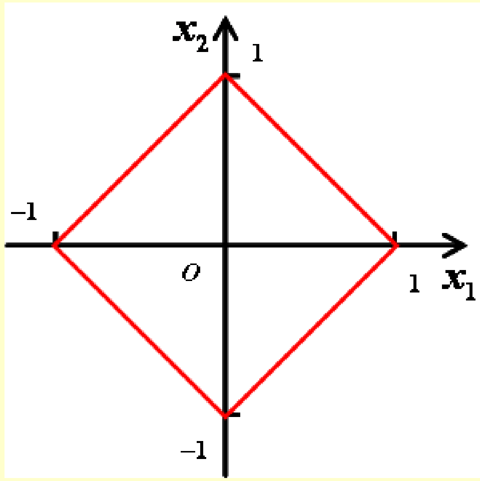
提示：$\because A_{n\times n}$是实对称正定矩阵

$\therefore A = P^T P$，其中$P$可逆

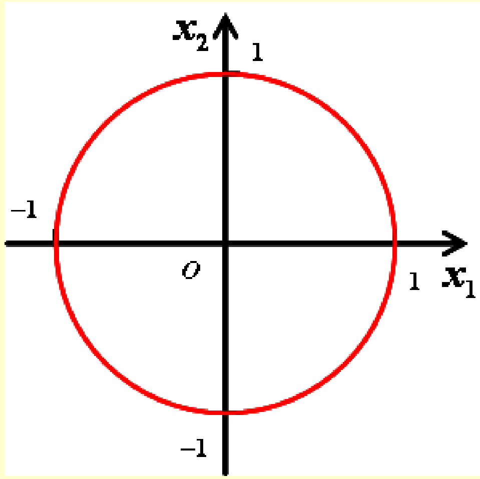
$$\therefore \| x \|_A = \sqrt{x^T Ax} = \sqrt{x^T P^T Px} = \sqrt{(Px)^T (Px)} = \|Px\|_2$$

例4 设$x=(x_1,x_2)^T\in R^2$,画图描述如下点集。

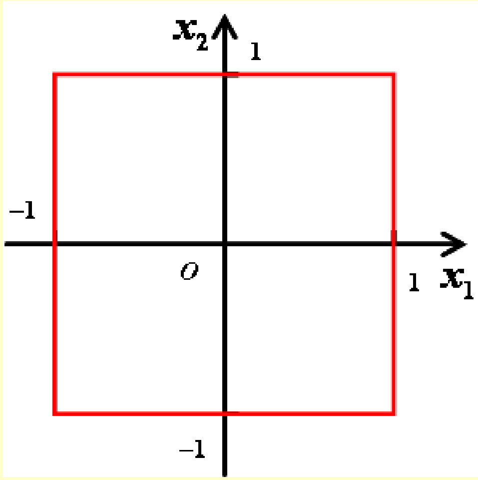
$$S_1=\{x \mid \|x\|_1=1\};$$
$$\Leftrightarrow |x_1|+|x_2|=1$$




$$S_2=\{x \mid \|x\|_2=1\};$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2}=1$$




$$S_3=\{x \mid \|x\|_\infty=1\};$$
$$\Leftrightarrow \max(|x_1|,|x_2|)=1$$



# ❏. 矩阵范数

**1 定义** 对$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若对应正实数$\|A\|$，满足：

1) $\|A\|\geq 0$ ,且 $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=O$;

2) $\forall c\in R$ $\|cA\|=|c|\cdot\|A\|$;

3) $\forall B\in R^{n\times n}$, $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$;

4) $\forall B\in R^{n\times n}$ $\|AB\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$.

则称$\|A\|$为$A$的矩阵范数。

**2 常用的矩阵范数** 1）$\infty-$范数（行范数）： $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

2） $1-$范数（列范数）： $\|A\|_1=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

3）$2-$范数(谱范数)： $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

其中，$\lambda_{\max}(A^TA)$是$A^TA$的最大特征值

例5 设$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$，求$\|A\|_\infty$、$\|A\|_1$和$\|A\|_2$。

解 $\|A\|_\infty=7$，$\|A\|_1=6$

$$\because A^TA=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -14\\ -14 & 20\end{pmatrix}$$

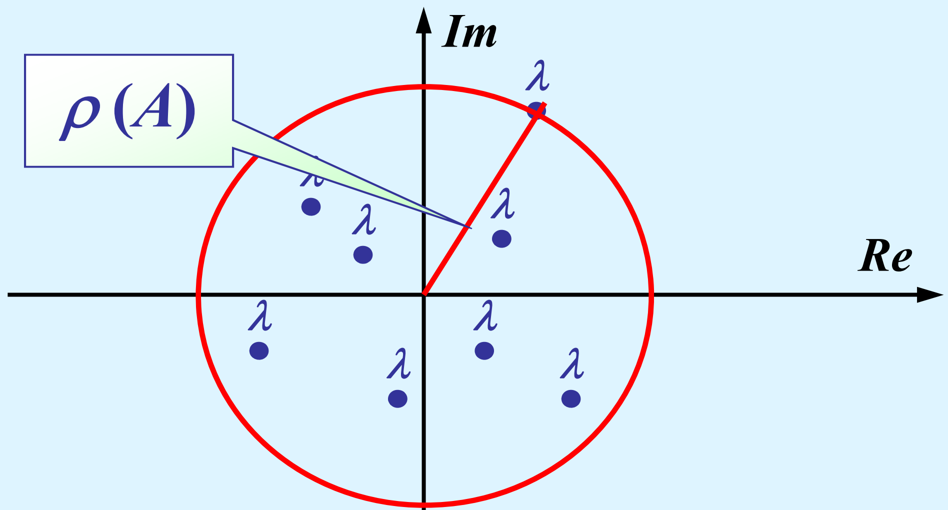
$$\therefore |A^TA-\lambda E|=\begin{vmatrix}10-\lambda & -14\\ -14 & 20-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-30\lambda+4=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-16}}{2}=15\pm\sqrt{221}$$

$$\therefore\ \lambda_{\max(A^TA)}=15+\sqrt{221},\qquad \|A\|_2=\sqrt{15+\sqrt{221}}$$

## ❐.谱半径

设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，称$\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$为$A$的谱半径。




## ❐.重要结论

**1　范数的等价性。**

- 定义 对$R^n$上任意两种向量范数$\|x\|_\alpha$、$\|x\|_\beta$，$\exists$常数$0\le c_1\le c_2$，使

$$c_1\|x\|_\alpha\le\|x\|_\beta\le c_2\|x\|_\alpha$$

- 例如　$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty$，　$\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\|x\|_\infty$

- 含义 向量序列$\{x^k\}$的敛散性不会因度量标准(范数)的选取不同而异!

## 2 范数的相容性。

矩阵的$p$范数和向量的$p$范数是相容的，即满足

$$\|Ax\|_p \le \|A\|_p \cdot \|x\|_p ,\ (p=1,2,\infty)$$

3 对具有相容性的矩阵范数$\|A\|$，有$\rho(A) \le \| A \|$。

证明　设$(\lambda, x)$为$A$的特征对，即$Ax = \lambda x$，则有

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\therefore |\lambda| \le \|A\|,\quad \rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| \le \|A\|$$

## 二、病态与良态方程组

**例7** I）

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 1.0001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 1.0001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2.0001\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.000125\\ -0.000005\end{pmatrix}$$

$$\delta b=(0,0.0001)^T \Rightarrow \delta x=(-0.000125,0.000005)^T$$

良态的方程组　抗干扰能力强

II）

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2.0001\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\delta b=(0,0.0001)^T \Rightarrow \delta x=(1,1)^T$$

病态的方程组　抗干扰能力弱

问题：①如何估计误差向量的大小？
②如何对方程组的性态进行判断？衡量其病态程度?

# 二. 条件数

## 1.解的误差估计式

(1) 对$Ax=b$，设$A$可逆，若$b$有误差$\delta b$，则相应解的误差为$\delta x$,问$\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}=?$

$$\because A(x+\delta x)=b+\delta b \qquad \therefore A\delta x=\delta b$$

$$\therefore \delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\boxed{\therefore \quad \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|}$$

又$\because \|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$

$$\boxed{\therefore \quad \|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|}}$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

(2) 若$A$也有小扰动$\delta A$

性质：如果 $\|B\|<1$ ,则$I\pm B$非奇异，且

$$\left\|(I\pm B)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|B\|}$$

$$(A+\delta A)\delta\vec{x}=\delta\vec{b}-\delta A\vec{x}\Leftrightarrow A(I+A^{-1}\delta A)\delta\vec{x}=\delta\vec{b}-\delta A\vec{x}$$

若$\left\|A^{-1}\delta A\right\|<1$,可得$(I+A^{-1}\delta A)^{-1}$存在

$$\therefore\delta\vec{x}=(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta\vec{b}-(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A\vec{x}$$

$$\therefore\left\|\delta\vec{x}\right\|\le\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\left\|\delta\vec{b}\right\|-\frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\left\|\vec{x}\right\|$$

$$\because\frac{1}{\|\vec{x}\|}\le\frac{\|A\|}{\|\vec{b}\|}\quad\therefore\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}\right)$$

**2. 定义** 称$cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$为矩阵$A$的条件数。

**3. 性质**

(Ⅰ) 条件数反映了矩阵(方程组)的性态：

小，良态；大，病态；越大，病态越严重。

(Ⅱ) $cond(A)\ge 1$

(Ⅲ) $cond(cA)=cond(A) \quad c\neq 0$

**4. 常用的条件数** (1) $Cond(A)_1=\left\|A^{-1}\right\|_1\left\|A\right\|_1$

(2) $Cond(A)_\infty=\left\|A^{-1}\right\|_\infty\left\|A\right\|_\infty$

(3) $Cond(A)_2=\left\|A^{-1}\right\|_2\left\|A\right\|_2=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max(A^TA)}}{\lambda_{\min(A^TA)}}}$

**例8** 求例7中各方程组的条件数。

**解** (1) $\because A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 1.0001\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-0.25 & 1.25\\ 0.25 & -0.25\end{pmatrix}$

$$\therefore Cond(A)_\infty=6\times 1.5=9$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}10001 & -10000\\ -10000 & 10000\end{pmatrix}$

$$\therefore Cond(A)_\infty=20001\times 2.0001\approx 40004$$

# ❑. 精度分析

**定理5 (P56,证明自学)**

设： 1）$A$非奇异（可逆），$x$是$Ax=b$的精确解，$b\neq 0$;

2）$\tilde{x}$是$Ax=b$的近似解，且$r=A\tilde{x}-b$(称之为残向量)

则有
$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}\leq Cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$


定理表明：

1）当$cond(A)$较小，即为良态方程组时，残向量$r$小则解的精度高；

2）当$cond(A)$较大，即为病态方程组时，残向量$r$小则解的精度不一定高。

**例9** $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}2.0001\\ 2\end{bmatrix}$

准确解 $\vec{x}=(1,1)^T$

若 $\tilde{x}_1=(2,0)^T, r_1=A\tilde{x}_1-b=(0.0001,0)^T$

若 $\tilde{x}_2=(0.9,0.9)^T, r_2=A\tilde{x}_2-b=(0.2001,0.2)^T$

显然 $\tilde{x}_2$ 的精度高，但它的残向量却大。

# §4 迭 代 法

回顾： $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

推广： $\vec{x}^{(k+1)} = M\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$

## ❐ 一个例子

求解 $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$ 即$Ax = b$, 精确解：$x^* = (3,2,1)^T$

**✍方案1 Jacobi迭代法**

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(20 + 3x_2 - 2x_3) \\ x_2 = \frac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ x_3 = \frac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 + 36) \end{cases}$$

建立迭代：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12}(36 - 6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

取初值：$x^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^T = (5/2, 3, 3)^T$$

$$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^T = (3/8, 20/11, 5/4)^T$$

……

$$x^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.9998813)^T$$

矩阵形式：$Ax = b$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & \frac{-2}{8} \\ \frac{-4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ \frac{-6}{12} & \frac{-3}{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{8} \\ \frac{33}{11} \\ \frac{36}{12} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \mathrm{M}x + g$$

$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = \mathrm{M}x^{(k)} + g$$

## 方案2　Gauss-Seidel迭代法

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(20+3x_2-2x_3) \\ x_2 = \frac{1}{11}(33-4x_1+x_3) \\ x_3 = \frac{1}{12}(36-6x_1-3x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12}(36-6x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{(0)} = (0,0,0)^T, x^{(1)} = (2.5,3,3)^T$$

…… ……

$$x^{(10)} = (3.00003, 1.99983, 0.99988)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12}(36-6x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

把已有的结果用上，期待能有更好结果！

建立迭代：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12}(36-6x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

取初值：$x^{(0)} = (0,0,0)^T \quad \cdots, x^{(5)} = (2.999843, 2.000072, 1.000061)^T$

## 方案3　SOR迭代法

将G-S迭代等价变形：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12}(36 - 6x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{8}(20 - 8x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k+1)} - 11x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \frac{1}{12}(36 - 6x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} - 12x_3^{(k)}) \end{cases}$$

记作： $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)} \ (i = 1,2,3,4)$

建立迭代： $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot \Delta x_i^{(k)} \ (i = 1,2,3,4)$

即：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{8}(20 - 8x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{11}(33 - 4x_1^{(k+1)} - 11x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{12}(36 - 6x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} - 12x_3^{(k)}) \end{cases}$$

# 一、常用的迭代法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

## 1 Jacobi迭代法

假设$a_{ii} \neq 0$，则从第$i$个方程中解出$x_i$： $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1})\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_1^{(k)})\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right) \end{cases}$$

$$or.\ x_i = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j)\cdot\frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \Rightarrow or.\ x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})\cdot\frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

## 2 G-S迭代法

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})\cdot\frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

# 3 SOR迭代法

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \cdot \frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i + (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \cdot \frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

令：

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \cdot \frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)}$$

其中，$\omega$为松弛因子；$\omega = 1$，G-S迭代法；

$\omega > 1$，超松弛迭代法；

$\omega < 1$，低松弛迭代法。

## 二、迭代法的矩阵形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & 0 & & -a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \triangleq D-L-U$$

则 $Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b \Leftrightarrow Dx=b+(L+U)x \Leftrightarrow x=D^{-1}\left(b+(L+U)x\right)$

**1 Jacobi迭代法**

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1}\left(b+(L+U)x^{(k)}\right) \\ &= D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b \\ &= D^{-1}b+D^{-1}(D-A)x^{(k)} \\ &= (E-D^{-1}A)x^{(k)}+D^{-1}b \end{aligned}$$

**2 G-S迭代法**

$$x^{(k+1)}=D^{-1}\left(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow (D-L)x^{(k+1)}=\left(b+Ux^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}\left(b+Ux^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$$

**3 SOR迭代法** $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega D^{-1}\left(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}-Dx^{(k)}\right)$

$$\Rightarrow x^{(k+1)}=(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right]x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b$$

综上可见，三种迭代法可统一为：

$$x^{k+1} = \mathbf{M}x^k + g$$

其中，M为迭代矩阵：$\mathbf{M}_{\mathrm{J}} = (E - D^{-1}A);$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{G\text{-}S}} = (D - L)^{-1}U;$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{SOR}} = (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right];$$

----迭代法的矩阵形式

# 三、迭代法的收敛性

## 1. 基本概念

### 1）向量序列极限

设$\boldsymbol{x}^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)^T\in R^n\ (k=0,1,\cdots),\boldsymbol{x}^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)^T\in R^n$，

若$\lim\limits_{k\to+\infty}x_i^{(k)}=x_i^*(i=1,\cdots,n)$，则称向量序列$\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}$收敛于$\boldsymbol{x}^*$，记作：$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{x}^k=\boldsymbol{x}^*$.

### 2）迭代法的收敛性

设$\boldsymbol{x}^{(k)}$是由迭代公式$\boldsymbol{x}^{k+1}=\mathbf{M}\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{g}$生成的向量序列，若$\lim\limits_{k\to+\infty}x_i^{(k)}$存在，则称迭代法收敛，否则发散，且收敛时有$\boldsymbol{x}^*=\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}$。

## 3）定理(补充)

$$\lim_{k\to+\infty} x^k = x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \| x^k - x^* \| = 0$$，其中$\|\cdot\|$为向量任一范数。

**pf** $$\lim_{k\to+\infty} x^k = x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} | x_i^{(k)} - x_i^{(*)} | = 0, (i = 1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \max_i | x_i^{(k)} - x_i^{(*)} | = 0$$

范数的等价性

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \| x^k - x^* \|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \| x^k - x^* \| = 0$$

## 2. 判别条件

1）收敛基本定理【充要条件, P59−Th6】

$$x^{(k+1)}=\mathbf{M}x^{(k)}+g\text{对任意初值收敛}\Leftrightarrow\rho(M)=\max|\lambda_i|<1\text{。}$$

例1　判断迭代格式 $x^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}x^{(k)}+\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$的收敛性。

解　$\because$ 迭代矩阵$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}$

$$\therefore f(\lambda)=|\lambda E-\mathbf{M}|=\begin{pmatrix}\lambda&-2\\-3&\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-6=0$$

$$\therefore \lambda_1=\sqrt{6},\lambda_2=-\sqrt{6}$$

$\therefore \rho(\mathbf{M})=\max(|\lambda_1|,|\lambda_2|)=\sqrt{6}>1$, 迭代发散！

例2 设$Ax=b$,其中$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -2a\\ a & 2a & 1\end{pmatrix}$, $a\in R$。

求使Jacobi迭代过程收敛和发散的$a$的取值范围。

解 $\because \mathbf{M}_J = E - D^{-1}A = \begin{pmatrix}0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 2a\\ -a & -2a & 0\end{pmatrix}$

$$\therefore f(\lambda)=|\lambda E-\mathbf{M}_J|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & a\\ 0 & \lambda & -2a\\ a & 2a & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+3a^2)=0$$

$\therefore \mathbf{M}_J$的特征值为：$\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{3a^2}i=\pm\sqrt{3}|a|i$

$\therefore$ 迭代收敛 $\Leftrightarrow \rho(\mathbf{M}_J)<1 \Leftrightarrow \sqrt{3}|a|<1 \Leftrightarrow |a|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 当$|a|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时，Jacobi迭代收敛；当$|a|\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时，Jacobi迭代发散。

例3 对$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=5 \\ ax_1+\ \ x_2 \qquad\quad =4, \\ \qquad 0.5x_2+x_3=6 \end{cases}$ $a\in R$, 1) 建立G-S迭代公式；2) 确定使G-S迭代收敛和发散的$a$的范围。

解 1) G-S迭代公式: $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=5+x_2^{(k)}-x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=4-ax_1^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)}=6-0.5x_2^{(k+1)} \end{cases}$

2) $$\mathrm{M_G}=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}1 & & \\ a & 1 & \\ 0 & 0.5 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 \\ 0 & -2a & a \\ 0 & a & -0.5a\end{pmatrix}$$

$$\therefore f(\lambda)=|\lambda E-M_J|=\lambda^2(\lambda+2.5a)=0$$

$\therefore \mathrm{M_{G\text{-}S}}$的特征值为：$\lambda_{1,2}=0$，$\lambda_3=-2.5a$

$$\therefore \rho(\mathrm{M_{G\text{-}S}})=|-2.5a|=2.5|a|$$

$\therefore$迭代收敛 $\Leftrightarrow \rho(\mathrm{M_{G\text{-}S}})<1 \Leftrightarrow 2.5|a|<1 \Leftrightarrow |a|<\dfrac{2}{5}$

$\therefore$当$|a|<\dfrac{2}{5}$时，迭代收敛；当$|a|\geq\dfrac{2}{5}$时，迭代发散。

## 2) 判定条件II【充分条件, P61−Th7】

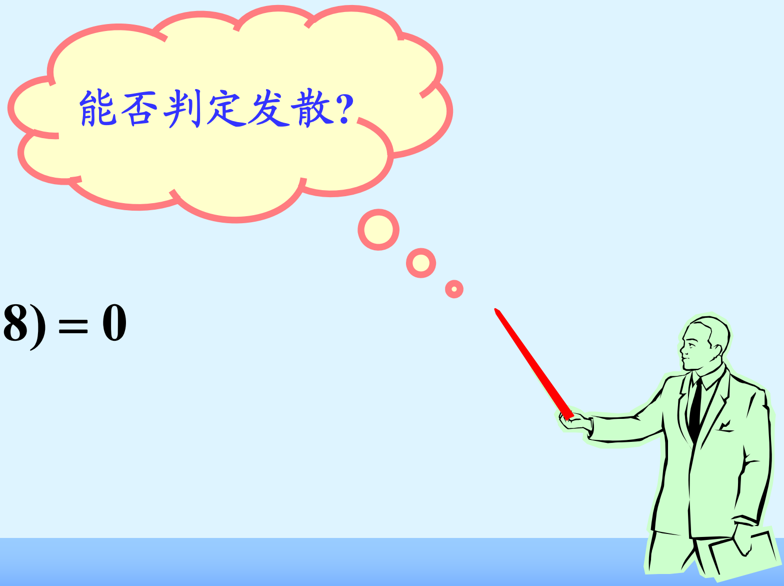
设迭代矩阵的某种范数满足$\|\mathbf{M}\| = q < 1$，则迭代$x^{(k+1)} = \mathbf{M}x^{(k)} + g$收敛，且有

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|, \quad \left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$$

例4　设迭代矩阵$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$,判断迭代$x^{(k+1)} = \mathbf{M}x^{(k)} + g$是否收敛？

易见：$\|\mathbf{M}\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\mathbf{M}_{ij}| = 1.2 \ > 1$

$$\|\mathbf{M}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{M}_{ij}| = 1.1 \ > 1$$




但：$|\lambda \mathbf{E}\text{-}\mathbf{M}| = 0 \ \Rightarrow (\lambda - 0.9)(\lambda - 0.8) = 0$

$$\Rightarrow \rho(\mathbf{M}) = 0.9 < 1$$

$$\Rightarrow \ \text{收敛}$$

## 3) 判定条件III【充分条件, P62−Th8】

对$Ax=b$,①若$A$为严格对角占优方阵，则Jacobi和G-S迭代收敛；

②若$A$为对称正定矩阵，则G-S迭代收敛。

**例5** 判定下面方程组用Jacobi迭代是否收敛，如不收敛，能否将方程组变形使之收敛。

$$\begin{cases} x_1-10x_2+20x_3=11 \\ -10x_1+x_2-5x_3=-14 \\ x_1-5x_2-x_3=3 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -10 & 20 \\ -10 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

1）若直接建立Jacobi迭代，不满足判定条件III，故无法判定。

2）利用收敛基本判定定理判定

$$A=\begin{pmatrix}1 & -10 & 20\\ -10 & 1 & -5\\ 1 & -5 & -1\end{pmatrix}$$

$$\because \mathrm{M_J}=E-D^{-1}A=\begin{pmatrix}0 & 10 & -20\\ 10 & 0 & 5\\ 1 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore f(\lambda)=|\lambda E-\mathrm{M_J}|=\begin{pmatrix}\lambda & -10 & 20\\ -10 & \lambda & -5\\ -1 & 5 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^3-55\lambda-1050$$

$$\because f(1)=1-55-1050 \quad <0$$

$$f(100)=1000000-1050-5500 \ >0$$

$\therefore f(\lambda)=0$在(1,100)之间有根

$\therefore \rho(\mathrm{M_J})>1$，Jacobi迭代发散。

注：实际上，$\lambda_1=11.9520,\lambda_{2,3}=-5.9760\pm 7.22071i$

$\therefore \rho(\mathrm{M_J})=11.9520>1$，发散！

将方程等价变形：

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 20x_3 = 11 \\ -10x_1 + x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 10x_2 + 20x_3 = 11 \end{cases}$$

则$A' = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -10 & 20 \end{pmatrix}$，严格对角占优！

$\therefore$由判定条件III知，Jacobi迭代收敛

建立的Jacobi迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-14 - x_2^{(k)} + 5x_3^{(k)})/(-10) \\ x_2^{(k+1)} = (3 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/(-5) \\ x_3^{(k+1)} = (11 - x_1^{(k)} + 10x_2^{(k)})/(20) \end{cases}$$

注：$A$对称正定时，不能保证Jacobi迭代收敛。

如，对称阵$A=\begin{bmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{bmatrix}$，$A$正定 $\Leftrightarrow \begin{cases}|1|>0\\ \begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix}=1-a^2>0\\ |A|=(2a+1)(1-a)>0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<a<1$

$\therefore$ 当$-\dfrac{1}{2}<a<1$时，G-S迭代收敛；

但是，$\mathbf{M}_\mathrm{J}=E-D^{-1}A=-\begin{bmatrix}0&a&a\\a&0&a\\a&a&0\end{bmatrix}$

$$\therefore |\lambda E-\mathbf{M}_\mathrm{J}|=(\lambda+2a)(\lambda-a)^2$$

$\therefore$ J迭代收敛 $\Leftrightarrow \rho(\mathbf{M}_\mathrm{J})<1 \Leftrightarrow \max(|-2a|,|a|)=2|a|<1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

这表明，当$-\dfrac{1}{2}<a<1$时，$A$对称正定，但Jacobi不收敛。

## 4) 判定条件IV【SOR迭代法, P63,64 - Th9,10】

- SOR迭代法收敛的必要条件是 $0<\omega<2$。
- 对 $Ax=b$，若 $A$ 对称正定，则SOR迭代收敛的充要条件是 $0<\omega<2$。

# 练习

给定方程组 $\begin{cases} -x_1 - 2ax_2 = -2 \\ 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 - 3ax_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

**1. 写出用 Jacobi 迭代和高斯-塞德尔迭代求解的迭代格式(要求用矩阵形式表示)；**

**2. 确定分别使 Jacobi 迭代过程收敛和发散的 a 的取值范围。**