# 第十九讲

## 习题课（四）

# 重要内容回顾

1. 极值判别的三个充分条件；

2. 最大值和最小值.

# 补充例题

**例1** 利用极值证明不等式:

$$\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \quad (x \neq 0).$$

**解** $\because \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$，所以等价于证明:

$$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

令 $f(x) = 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$,

则 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\qquad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0,$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 唯一的极小值点, 自然也是 $f(x)$ 的最小值点. 从而当 $x\neq 0$ 时,

$$f(x)>f(0)=0,$$

即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x\neq 0).$$

**例2**　$a$ 为何值时，$f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 时取得极值？求出该极值，并指出它是极大还是极小.

**解**　$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，因为 $f'(\dfrac{2}{3}\pi)=0,$

所以 $a\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)+\cos 3\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{1}{2}a+1=0,$

得到 $a=2.$

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x,$

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-2\sin\frac{2}{3}\pi<0.$$

因此 $f(x)$在 $a=2$ 时取得极大值 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}.$

例3 设 $a$ 为一正数，试将 $a$ 分成若干部分，使得各部分的乘积为最大.

解 根据算术—几何平均不等式，可知各部分相等时乘积才最大. 所以本题化为求 $n$，使得 $f(n)=\left(\frac{a}{n}\right)^n$ 最大. 为此设

$$f(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x \quad x>0,$$

则

$$f'(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x\left(\ln\frac{a}{x}-1\right).$$

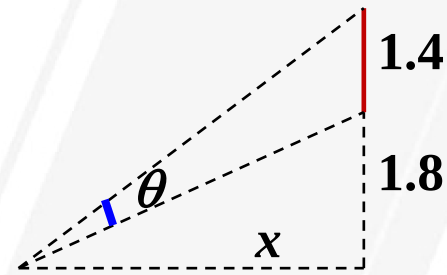
可见函数只有唯一的稳定点 $x_0=a/\mathrm{e}$. 根据导数的符号，容易判断它是极大值点(自然也是最大值点).

即函数当 $x < a/\mathrm{e}$ 时严格递增, 当 $x > a/\mathrm{e}$ 时严格递减.
而原问题要求 $n$ 是正整数, 若 $x_0 = a/\mathrm{e}$ 不是正整数,
则当 $a < \mathrm{e}(x_0 < 1)$ 时, 取 $n$=1;
当 $a > \mathrm{e}(x_0 > 1)$ 时, 存在正整数 $n$, 使得

$$n < \frac{a}{\mathrm{e}} < n + 1.$$

然后比较 $f\left(\dfrac{a}{n}\right)$ 和 $f\left(\dfrac{a}{n+1}\right)$ 的大小, 以决定将 $a$ 等分成 $n$份，还是$n$+1份.

**例4** 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角$\theta$最大)？




**解** 设观察者与墙的距离为 $x$ m，则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x},\quad x\in(0,+\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta'=0$，得驻点 $x=2.4\in(0,+\infty)$. 这是唯一的驻点，容易判断它是极大值点，因此也是函数$\theta$的最大值点. 故观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚.