数学分析 第一章
实数集与函数

§2 数集 · 确界原理

确界原理本质上体现了实数的完备性，是本节学习的重点与难点.

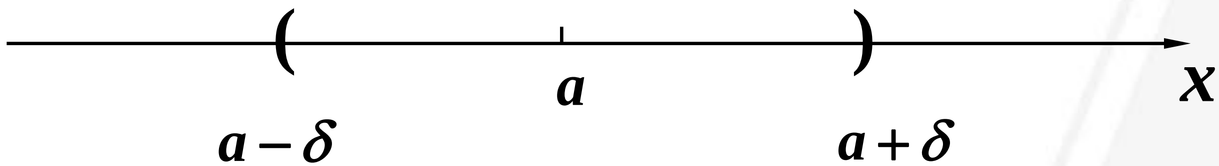
*点击以上标题可直接前往对应内容

第三讲

数集的确界

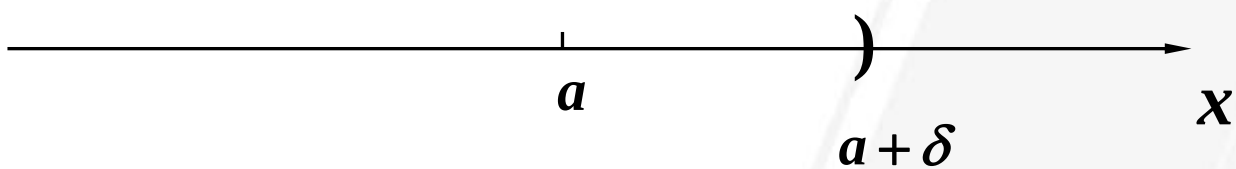
记号与术语

$U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 点 a 的 δ 邻域



$U^{\circ}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 点 a 的 δ 空心邻域

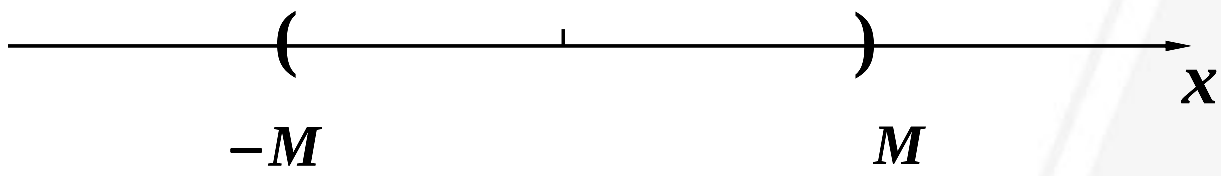
$U_{+}(a;\delta)=\{x \mid 0\le x-a<\delta\}$ 点 a 的 δ 右邻域



$U_{-}(a;\delta)=\{x \mid 0\le a-x<\delta\}$ 点 a 的 δ 左邻域

记号与术语

$$U(\infty;M)=\{x \mid |x|>M\}$$ ∞的 M 邻域



$$U(+\infty;M)=\{x \mid x>M\}$$ $+\infty$的 M 邻域

$$U(-\infty;M)=\{x \mid x<M\}$$ $-\infty$的 M 邻域

$\max S$: 数集 S 的最大值

$\min S$: 数集 S 的最小值

有界集

定义1

设$S \subset \mathbf{R}, S \neq \varnothing$.

(1) 若$\exists M \in \mathbf{R}$, 使得$\forall x \in S$, $x \leq M$,则称 M 为 S 的一个上界, 称 S 为有上界的数集.

(2) 若$\exists L \in \mathbf{R}$, 使得$\forall x \in S$, $x \geq L$, 则称 L 为 S的一个下界, 称 S 为有下界的数集.

(3) 若 S 既有上界又有下界, 则称 S 为有界集.

其充要条件为: $\exists M > 0$, 使 $\forall x \in S$, 有 $|x| \leq M$.

例如区间$(-\infty,0]$是有上界的数集,

而且每个非负数都是其上界.

区间$(2,+\infty)$有下界,

而且小于等于2的数都是其下界.

数集$\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$有界.

且1, −1分别为其上界，下界.

(1′) 若 S 不是有上界的数集, 则称 S 无上界, 即 $\forall M \in \mathbf{R}, \exists\ x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$.

(2′) 若 S 不是有下界的数集, 则称 S 无下界, 即 $\forall L \in \mathbf{R}$, $\exists\ x_0 \in S$, 使得 $x_0 < L$.

(3′) 若 S 不是有界的数集, 则称 S 为无界集, 即 $\forall M > 0$, $\exists\ x_0 \in S$, 使得 $|x_0| > M$.

例1 证明数集 $S=\{2^n \mid n\in \mathrm{N}_+\}$ 无上界, 有下界.

证 取 $L=1$, 则 $\forall x=2^n\in S$, $x\geq L$, 故 S 有下界.

$\forall M\in \mathrm{R}$, 若 $M<1$, 取 $x_0=2^1>M$; 若 $M\geq 1$,

取 $x_0=2^{[M]+1}>[M]+1>M$, 因此 S 无上界.

例2 证明数集 $S=\left\{\dfrac{n^2-1}{2n^3}\,\middle|\, n\in \mathrm{N}_+\right\}$ 有界.

证 $\forall n\in \mathrm{N}_+$, $\left|\dfrac{n^2-1}{2n^3}\right|\leq\left|\dfrac{n^2}{2n^3}\right|+\left|\dfrac{1}{2n^3}\right|\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$,

因此 S 有界.

确界

若数集 S 有上界,则必有无穷多个上界, 而其中最小的一个 (如果有) 具有重要的作用,称为上确界. 同样若 S 有下界,最大的下界(如果有)称为下确界.

定义2

设 $S \subset \mathbf{R}, S \neq \varnothing$, 若 $\eta \in \mathbf{R}$满足:

(i) $\forall\, x \in S,\ x \le \eta$; (ii) $\forall\, \alpha < \eta,\ \exists\, x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$,

则称 η 是 S 的上确界, 记作 $\eta = \sup S$.

注1 条件(i) 说明 η 是 S 的一个上界, 条件(ii) 说明比 η 小的数都不是 S 的上界, 从而 η 是最小的上界. 即上确界是最小的上界.

注2 条件 (ii) 亦可换成:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S,\quad x_0 > \eta - \varepsilon.$$

定义3

设 $S \subset \mathbf{R}, S \neq \varnothing$, 若 $\xi \in \mathbf{R}$满足:

(i) $\forall x \in S,\quad x \geq \xi;$

(ii) $\forall \beta > \xi, \exists x_0 \in S,\quad x_0 < \beta;$

则称 ξ 是 S 的下确界, 记作 $\xi = \inf S$.

注3 由定义, 下确界是最大的下界.

注4 下确界定义中的 (ii)亦可换成

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists x_0 \in S,\quad x_0 < \xi + \varepsilon.$$

例3 设 $S=\left\{x \,\middle|\, x=1-\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$，证明

$$\sup S=1,\ \inf S=0.$$

证 先证 $\sup S=1$.

(i) $\forall x\in S$, $x=1-\dfrac{1}{n}\le 1$;

(ii) 设 $\alpha<1$. 若 $\alpha\le 0$, 则取 $x_0=1-\dfrac{1}{2}\in S$, $x_0>\alpha$.

若 $\alpha>0$, 令 $\varepsilon=1-\alpha>0$, 由阿基米德性, $\exists\, n_0$,

使得 $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$. 取 $x_0=1-\dfrac{1}{n_0}\in S$, 则 $x_0>1-\varepsilon=\alpha$.

因此，$\sup S=1$.

再证 $\inf S = 0.$

(i) $\forall x \in S,\ x = 1 - \dfrac{1}{n} \ge 0$;

(ii) $\forall \alpha > 0, \exists\ x_0 = 0 \in S,\ x_0 < \alpha.$

因此 $\inf S = 0.$

虽然我们定义了上确界, 但并没有证明上确界的存在性, 这是由于上界集是无限集, 而无限数集不一定有最小值, 例如 $(0, \infty)$ 无最小值.

例4 设 S是非空数集，求证：

$$\sup S \in S \Leftrightarrow S\text{的最大值存在.}$$

此时有$\sup S = \max S$.

证 $\Rightarrow$) 设 $x_0 = \sup S \in S$. 则由定义，得

$\forall x \in S,\quad x \le x_0$. 这就说明$x_0 = \max S$.

$\Leftarrow$) 设 $x_0 = \max S$. 则$\forall x \in S,\ x \le x_0$.

又$\forall \varepsilon > 0$, 取 $x_0 \in S$. 显然$x_0 > x_0 - \varepsilon$.

故$\sup S = x_0 = \max S$.