数学分析　第七章
实数的完备性

在第一章与第二章中，我们已经证明了实数集中的确界定理、单调有界定理,致密性定理和柯西收敛准则．上述定理反映了实数的一种特性,这种特性称为完备性．而有理数集是不具备这种性质的．在本章中，将着重介绍与上述定理的等价性定理及其应用.这些定理是数学分析理论的基石．

§1 关于实数集完备性的基本定理

一、 区间套定理

二、 聚点定理与有限覆盖定理

三、 实数完备性基本定理之间的等价性

第一讲

区间套定理

区间套定理

定义1

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足如下条件：

1. $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$，$n = 1, 2, \cdots,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套, 简称**区间套**.

定义1 中的条件1 实际上等价于条件

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 .$$

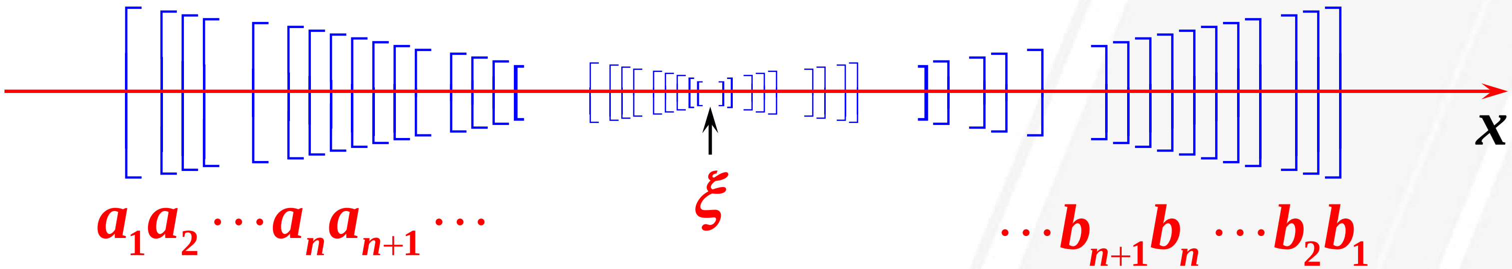
定理7.1（区间套定理）

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 则存在唯一的实数 ξ, 使

$$\xi \in [a_n, b_n],\ \ n = 1, 2, \cdots,$$

或者

$$\{\xi\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$



证 由定义1 的条件1 可知, 数列$\{a_n\}$递增, 有上界b_1. 所以由单调有界定理, 可知 $\{a_n\}$ 的极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, 从而由定义1 的条件2 可得

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = \xi.$$

因为 $\{a_n\}$ 递增, $\{b_n\}$ 递减，所以

$$a_n \le \xi \le b_n,$$

这样就证明了 ξ 的存在性.

下面来证明唯一性. 设 ξ_1 也满足

$$a_n \le \xi_1 \le b_n,$$

那么 $|\xi - \xi_1| \le b_n - a_n \to 0.$

即 $\xi = \xi_1$, 唯一性得证.

推论

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套，$\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$.
则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N，当 $n \geq N$ 时，

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi; \varepsilon).$$

证　由区间套定理的证明可得:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

由极限的保号性，对于任意正数 ε, 存在 N,
当 $n \geq N$ 时, 有　$\xi - \varepsilon < a_n$, $b_n < \xi + \varepsilon$.

即　$\xi - \varepsilon < a_n < b_n < \xi + \varepsilon$，这就是说

$$[a_n, b_n] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon).$$

注1 该推论有着很强的应用价值, 请大家务必牢记.

注2 区间套定理中的闭区间若改为开区间, 那么结论不一定成立.

例如对于开区间列 $\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$, 显然

1. $\left(0, \dfrac{1}{n}\right) \supset \left(0, \dfrac{1}{n+1}\right)$, $n = 1, 2, \cdots$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} - 0\right) = 0.$

但是定理1中的ξ不存在, 这是因为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = \varnothing.$

大家可以思考一下，对于$\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$，按照定理1 的证过程，哪一步通不过？

例1 用区间套定理证明连续函数根的存在性定理.

证 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)f(b)<0$, 记 $[a_1,b_1]=[a,b]$.

令 $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, 不妨设 $f(c_1)\neq 0$, 则 $f(a_1)f(c_1)$ 与 $f(c_1)f(b_1)$ 有一个小于零 (设 $f(a_1)f(c_1)<0$), 记 $[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$. 再令 $c_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$, 同样设 $f(c_2)\neq 0$, 又得 $[a_3,b_3]$. 无限重复这个过程, 得到 $\{[a_n,b_n]\}$, 满足

(1) $[a_n,\ b_n]\supset[a_{n+1},\ b_{n+1}]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^{n-1}}=0$,

(3) $f(a_n)f(b_n)<0,\ n=1,2,3\cdots.$

由此可知 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，因此存在唯一的 $\xi\in[a_n,b_n],\ n=1,2,3\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由(3)及 f 在 $\xi\in[a,b]$ 的连续性，得

$$f^2(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)\le 0.$$

于是必有 $f(\xi)=0.$