第一讲

罗尔定理

数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

中值定理是联系 f' 与 f 的桥梁.有了中值定理,就可以根据 f' 在区间上的性质来得到 f 在该区间上的整体性质.

§1 拉格朗日定理和函数的单调性

一、罗尔定理与拉格朗日定理

二、函数单调性的判别

*点击以上标题可直接前往对应内容

罗尔定理

定理6.1（罗尔中值定理）

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上满足：

(i) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) 在开区间 (a, b) 上可导;

(iii) $f(a) = f(b)$.

那么在开区间(a, b)内必定(至少)存在一点ξ, 使

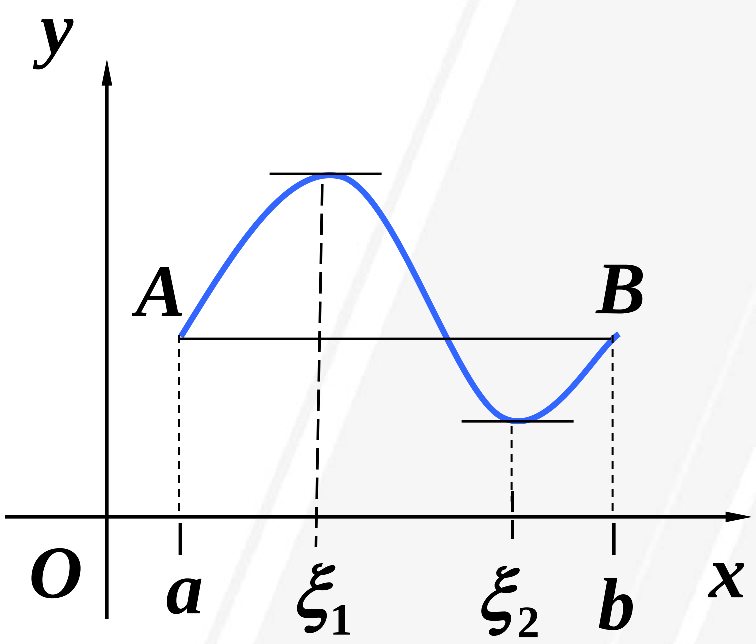
$$f'(\xi) = 0.$$

(1) 几何意义

据右图，因为

$$f(a) = f(b),$$

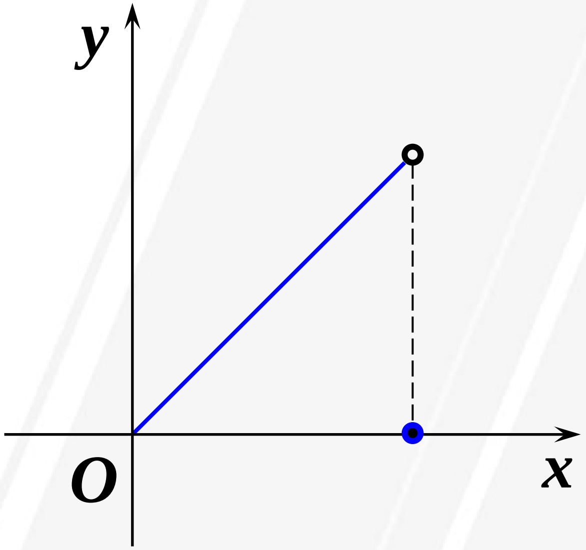
所以线段 AB 是水平的. 由几何直观可以看出，曲线上至少有一点处的切线也是水平的.



(2) 条件分析

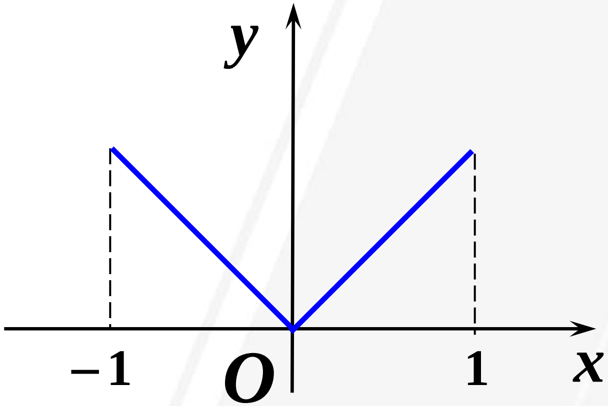
定理中的三个条件都很重要，缺少一个，结论就不一定成立.

(a) 函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

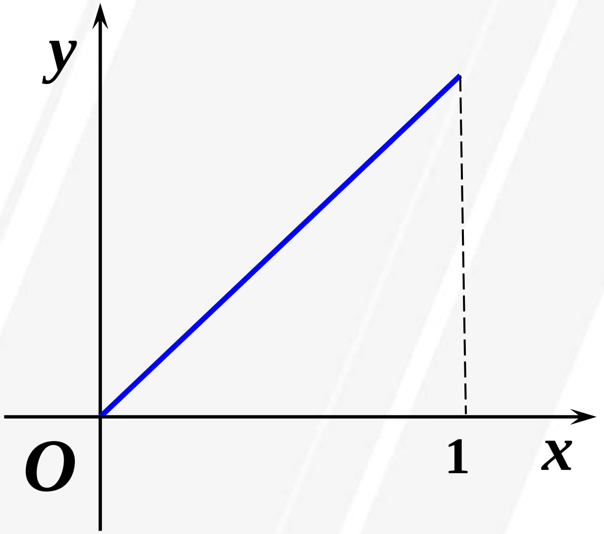


在 [0, 1] 上满足条件 (ii) 和 (iii)，但条件 (i) 不满足，该函数在 (0, 1) 上的导数恒为1. 结论不成立.

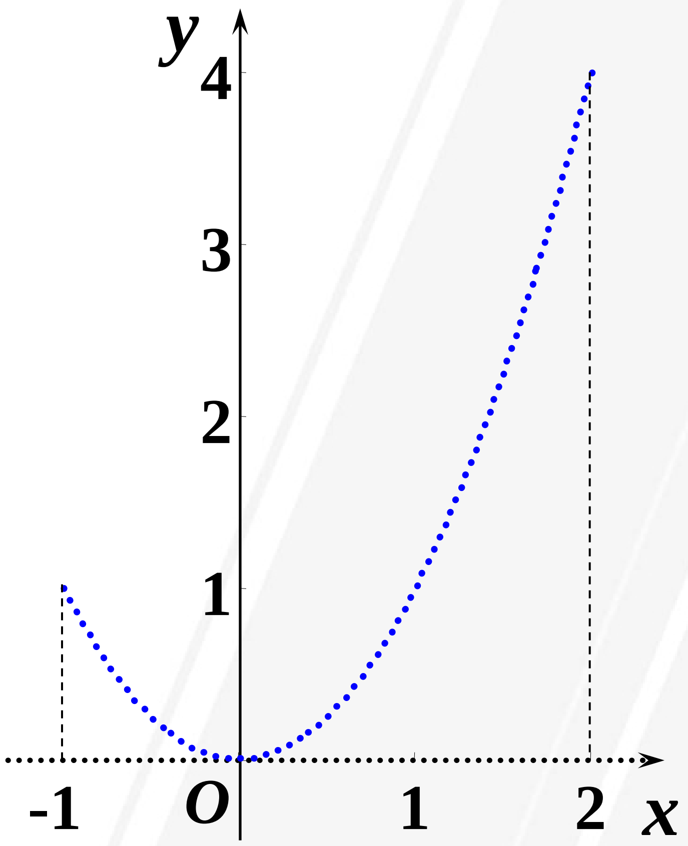
(b) $f(x)=|x|, x\in[-1, 1]$ 满足条件 (i) 和 (iii)，但条件 (ii) 却遭到破坏 (f 在 $x=0$ 处不可导). 结论也不成立.



(c) $f(x)=x, \ x\in[0,1]$ 满足条件 (i) 和 (ii)，但条件 (iii) 却遭到破坏，该函数在 $(0, 1)$ 内的导数恒为1. 结论也不成立.



注 函数 $f(x)=x^2D(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上三个条件都不满足，却仍有 $f'(0)=0$. 这说明罗尔定理的三个条件是充分条件，而不是必要条件.



下面证明定理

定理6.1（罗尔中值定理）

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上满足：

(i) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(ii) 在开区间 (a, b) 上可导； (iii) $f(a) = f(b)$.

则在开区间(a, b)内至少存在一点ξ，使

$$f'(\xi) = 0.$$

证

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，所以由连续函数的最大、最小值定理，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上能取得最大值 M 和最小值 m.下面分两种情形加以讨论.

情形1 $M = m$. 此时 $f(x)$ 恒为常数,它的导函数恒等于零，此时可在 (a, b) 内随意取一点 ξ, 就有

$$f'(\xi) = 0 .$$

情形2 $m < M$. 既然最大、最小值不等，从而最大值与最小值至少有一个不在端点取到．不妨设最大值不在端点取到，故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = M .$$

因为在区间内部取到的最大值一定是极大值，所以由费马定理，得 $f'(\xi) = 0.$

例1 设 $p(x)$ 是一个多项式, 且方程 $p'(x)=0$ 没有实根, 则方程 $p(x)=0$ 至多有一个实根，且这个根的重数为 1 .

证 设 $p(x)$ 有两个实根 x_1, x_2，$x_1 < x_2$，由于$p(x)$是多项式，所以$p(x)$在$[x_1, x_2]$上满足罗尔定理的条件，从而存在$\xi \in (x_1, x_2)$，使得 $p'(\xi)=0$，这与条件矛盾.

又若 $p(x)$ 有一个 k 次重根 x_0，则

$$p(x)=(x-x_0)^k p_1(x),\ \ k \geq 2.$$

因为$p'(x)=k(x-x_0)^{k-1}p_1(x)+(x-x_0)^k p_1'(x)$,

所以 $p'(x_0)=0$, 矛盾.