第七讲

不定式极限（一）

不定式极限

在极限的四则运算中，往往遇到分子，分母均为无穷小量（无穷大量）的表达式. 这种表达式的极限比较复杂，各种结果均会发生. 我们将这类极限统称为不定式极限. 现在我们将用柯西中值定理来研究这类极限, 这种方法统称为洛必达法则.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

1. $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限

定理6.7

若函数 f 和 g 满足:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(ii) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内两者均可导,

且 $g'(x)\neq 0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可以为实数, $\pm\infty$, ∞).

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证 补充定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$, 所以 f,g 在点x_0连续. 任取 $x\in U^\circ(x_0)$, 则在区间$[x_0,x]$(或$[x,x_0]$)上应用柯西中值定理，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad(\xi\text{介于}x_0\text{与 }x\text{ 之间}).$$

令 $x\to x_0$, 则$\xi\to x_0$, 于是有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

注 将定理 6.7 中的 $x \to x_0$ 改为 $x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 的情形,只要修正相应的邻域,结论同样成立.

例3 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin 4x}$.

解 容易验证：这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式 .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{4\cos 4x}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限,只要满足洛必达法则的条件，可再次使用该法则，考察 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的存在性.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x^2)\sim x^2$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$\dfrac{0}{0}$ 型

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}=1.$$

这里在用洛必达法则前，使用了等价无穷小量的代换，其目的就是使得计算更简洁些.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$.

解 这显然是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限，可直接利用洛必达法则. 但若作适当变换，在计算上会显得更简洁些.

令 $t=\sqrt{x}$，当 $x\to 0^+$ 时有 $t\to 0^+$，于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-\mathrm{e}^{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{-\mathrm{e}^{t}}=-1.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{1}$ 对数求导法

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$