数学分析　第四章
函数的连续性

§2 连续函数的性质

在本节中，我们将介绍连续函数的局部性质与整体性质.熟练地掌握和运用这些性质是具有分析修养的重要标志.

*点击以上标题可直接前往对应内容

第三讲

连续函数的局部性质

连续函数的局部性质

所谓连续函数局部性质就是指：若函数 f 在点 x_0 连续(左连续或右连续)，则可推知 f 在点 x_0 的某个局部邻域(左邻域或右邻域)内具有有界性、保号性、四则运算的保连续性等性质.

定理4.2（局部有界性）

若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某邻域 $U(x_0)$ 上有界.

证 因为 f 在 x_0 连续，所以对 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < 1$，故

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + 1.$$

注意：我们在证明有界性时，取 $\varepsilon = 1$ 这个特定的值，而不是用术语“对于任意的 $\varepsilon > 0$”，这样可求得 $|f(x)|$ 一个明确的上界.

定理4.3（局部保号性）

若函数 f 在点 x_0 连续,且

$$f(x_0)>0\,(\text{或 } f(x_0)<0),$$

则对任意一个满足

$$0<r<f(x_0)\text{或}(f(x_0)<-r<0)\ \text{的正数}r,$$

存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,

$$f(x)>r\quad(\text{或 } f(x)<-r<0).$$

证 因为 f 在 x_0 连续, 所以对正数 $\varepsilon_0=f(x_0)-r$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0=f(x_0)-r,$$

于是证得 $f(x)>r>0$.

注 在具体应用保号性时，我们经常取 $r=\dfrac{f(x_0)}{2}$.

定理4.4（连续函数的四则运算）

若函数 $f(x)$, $g(x)$ 均在点x_0连续,则函数

(1) $f(x)+g(x)$, (2) $f(x)-g(x)$,

(3) $f(x)\cdot g(x)$, (4) $f(x)/g(x)$, $g(x_0)\neq 0$

在点x_0也是连续的.

定理的证明可以直接从函数极限的四则运算得到,

具体过程请读者自行给出.

我们知道，常函数 $y=c$ 与线性函数 $y=x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，故由四则运算性质，易知多项式函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

也是连续函数.

下面这个定理刻画了连续这个性质在复合运算下是不变的.

定理4.5

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(u)$ 在点 u_0 连续，$u_0=f(x_0)$. 则复合函数 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

证 由于 $g(u)$ 在点 u_0 连续，因此对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $|u - u_0| < \delta_1$ 时，有

$$|g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

又因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故对上述 $\delta_1 > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |u - u_0| < \delta_1,$$

于是

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| = |g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

这就证明了 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

对这个定理我们再作一些讨论，以加深大家对该定理的认识.

(1) 由 $\lim\limits_{u \to u_0} g(u) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$, 不一定有

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = A.$$

请大家仔细观察定理4.5 的证明，看看此时究竟哪里通不过.

(2) 若 $g(u)$ 在 u_0 连续，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$，则有

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(u_0) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)). \qquad (*)$$

事实上，只要补充定义(或者重新定义) $f(x_0) = u_0$ 使得 $f(x)$ 在点 x_0 连续．应用定理4.5，就得到所需要的结论．若将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$ 改为

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = u_0$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = u_0$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = u_0$，

$(*)$式相应的结论仍旧是成立的.

上述(1)和(2)究竟有什么本质的区别呢？请读者作出进一步的讨论.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)$.

解 $\sin(1-x^2)$可视为 $g(u)=\sin u,\ u=(1-x^2)$ 的复合，所以

$$\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2)=\sin\left(\lim_{x\to 1}(1-x^2)\right)=0.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 因为 $g(u)=\sqrt{u}$ 在 $u=1$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(2-\frac{\sin x}{x})}=\sqrt{2-1}=1.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(1+\frac{1}{x})^x$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$, $\sin u$ 在点 $u=\mathrm{e}$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\sin(1+\frac{1}{x})^x=\sin\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\sin\mathrm{e}.$$