第五讲

反函数的连续性

例1. 若 $r>0, n$ 为正整数，则存在唯一的正数 x_0，使得 $x_0^n=r$.

证 先证存在性：

因为n为正整数, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$. 由极限的保号性知，存在 x_1，使$x_1^n>r$. 又因为函数 $f(x)=x^n$ 在 $[0, x_1]$上连续, 且 $f(0)<r<f(x_1)$，所以存在 $x_0\in(0,x_1)$，使得 $x_0^n=r$. 这个 x_0 我们记为 $x_0=\sqrt[n]{r}$ (读作 r 的 n 次算术根).

再证唯一性:

我们只需证明 $f(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增即可. 事实上, $\forall x, y$, 使 $0\le x<y$, 有

$$y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1})$$

$$>0,$$

即 $f(x)<f(y)$.

若 $r>0$, n 为正整数, 则存在唯一的正数 x_0, 使得 $x_0^n=r$.

例2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, $f([a,b])\subset[a,b]$. 证明: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

证 由条件知 $a\le f(a)$, $f(b)\le b$.

若 $a=f(a)$ 或 $b=f(b)$, 则结论成立.

现设 $a<f(a)$, $f(b)<b$. 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,$$

则 $F(a)\cdot F(b)=(f(a)-a)\cdot(f(b)-b)<0$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续. 由介值性定理, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使 $F(x_0)=0$, 即

$$f(x_0)=x_0.$$

例3. 设 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 满足介值性,并且对于任意的实数 r, $f(x)=r$ 至多有有限个解. 证明: $f(x)$在(a,b)内连续.

证 只要证$\forall x_0\in(a,b)$, $f(x)$在点x_0连续. 对任意$\varepsilon>0$, 由条件, 方程

$$f(x)=f(x_0)+\varepsilon \text{ 与 } f(x)=f(x_0)-\varepsilon$$

的解至多为有限个.

1. 设这有限个解为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 记

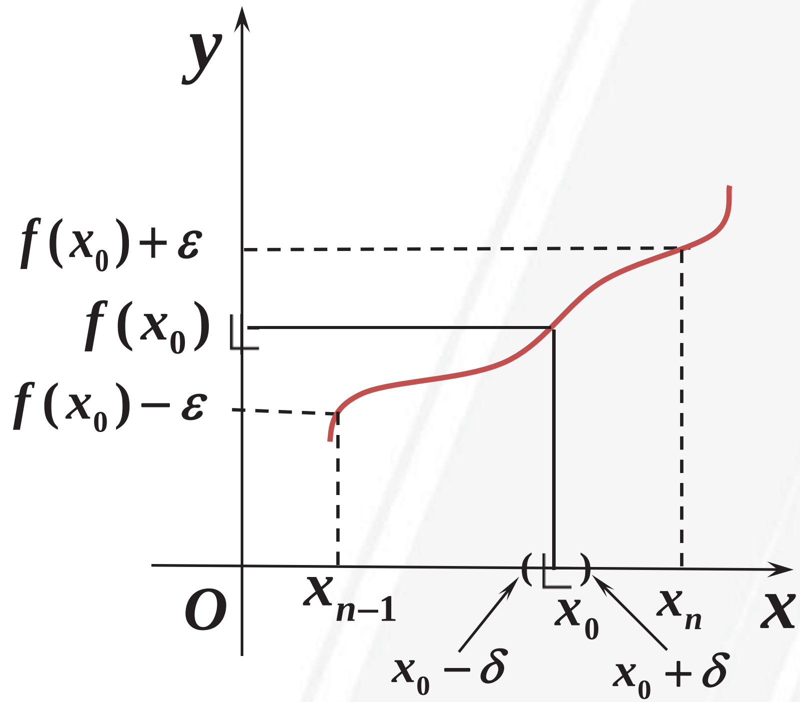
$$\delta=\min\{|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_n-x_0|\},$$

显然 $\delta>0$.

由介值性条件不难证明：

当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$



2. 如果解为空集，

任意取 $\delta>0$, $U(x_0;\delta)\subset(a,b)$,

当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,

即 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

反函数的连续性

定理4.8

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调且连续,则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续,且 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性.

证 不妨设 $f(x)$ 严格增,那么 $[f(a),f(b)]$ 就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

1. $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上严格增 (证明见定理1.2).

2. $x = f^{-1}(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

对于任意的正数 ε, $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$, 设

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon),$$

令 $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\} > 0$,

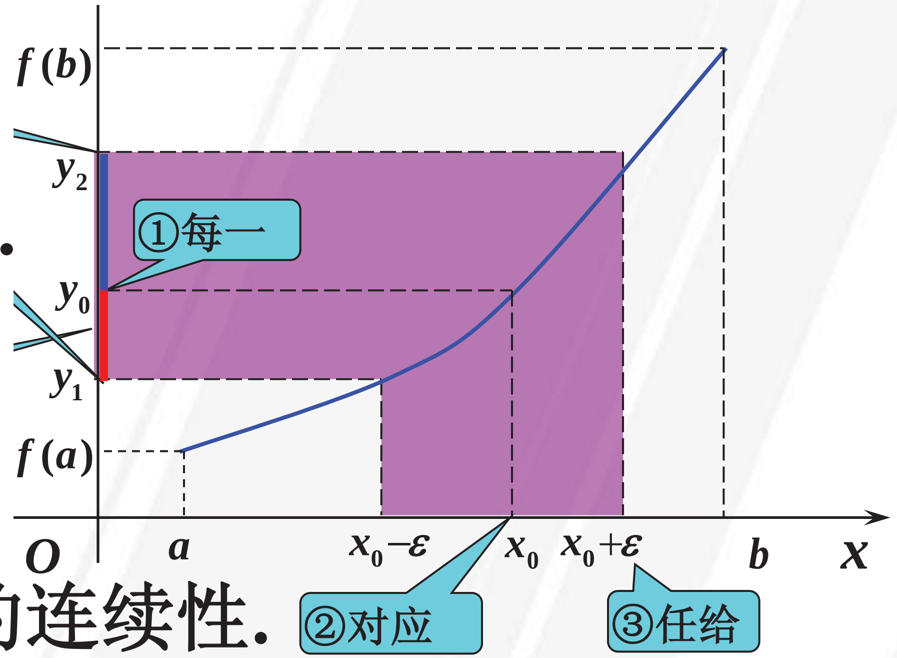
当 $(y_1 \le) y_0 - \delta < y < y_0 + \delta (\le y_2)$ 时,

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2),$$

即 $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$.

这就说明了 $x = f^{-1}(y)$ 在 $(f(a), f(b))$ 上连续.

可类似地证明该函数在端点的连续性.



例4. 由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续且严格增，因此它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是连续且严格增. 关于其它的反三角函数

$$y=\arccos x\,,\ y=\arctan x\,,\ y=\operatorname{arccot} x\,,$$

均可得到在定义域内连续的结论.

例5 由于 $y=x^n$（n为正整数）在 $[0,+\infty)$ 上连续且严格增，那么其反函数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上亦连续且严格增.