第四章 函 数 逼 近

§1 函数的最佳逼近

§2 离散数据的最佳逼近

§3 Fourier逼近

§2 离散数据的最佳平方逼近

给出一组离散点，确定一个函数逼近原函数，插值是的一种手段。但在实际问题中，数据不可避免的会有误差，插值函数会将这些误差也包括在内。因此，我们需要一种新的逼近原函数的手段：

①不要求过所有的点（可以减小误差影响）；

②尽可能表现数据的趋势，靠近这些点。

如：5个风景点，要修一条公路主干道S使得S为直线，且到所有风景点的距离和最小，而不要求公路通过所有的风景点。

一个实际问题

生产实践中，为了考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系，测量得到如下数据：

编号	拉伸倍数(x)	强度(y)	编号	拉伸倍数(x)	强度(y)	编号	拉伸倍数(x)	强度(y)
1	1.9	1.4	9	5	5.5	17	4	4
2	2	1.3	10	5.2	5	18	4	3.5
3	2.1	1.8	11	6	5.5	19	4.5	4.2
4	2.5	2.5	12	6.3	6.4	20	4.6	3.5
5	2.7	2.8	13	6.5	6	21	8.9	8.5
6	2.7	2.5	14	7.1	5.3	22	9	8
7	3.5	3	15	8	6.5	23	9.5	8.1
8	3.5	2.7	26	8	7	24	10	8.1

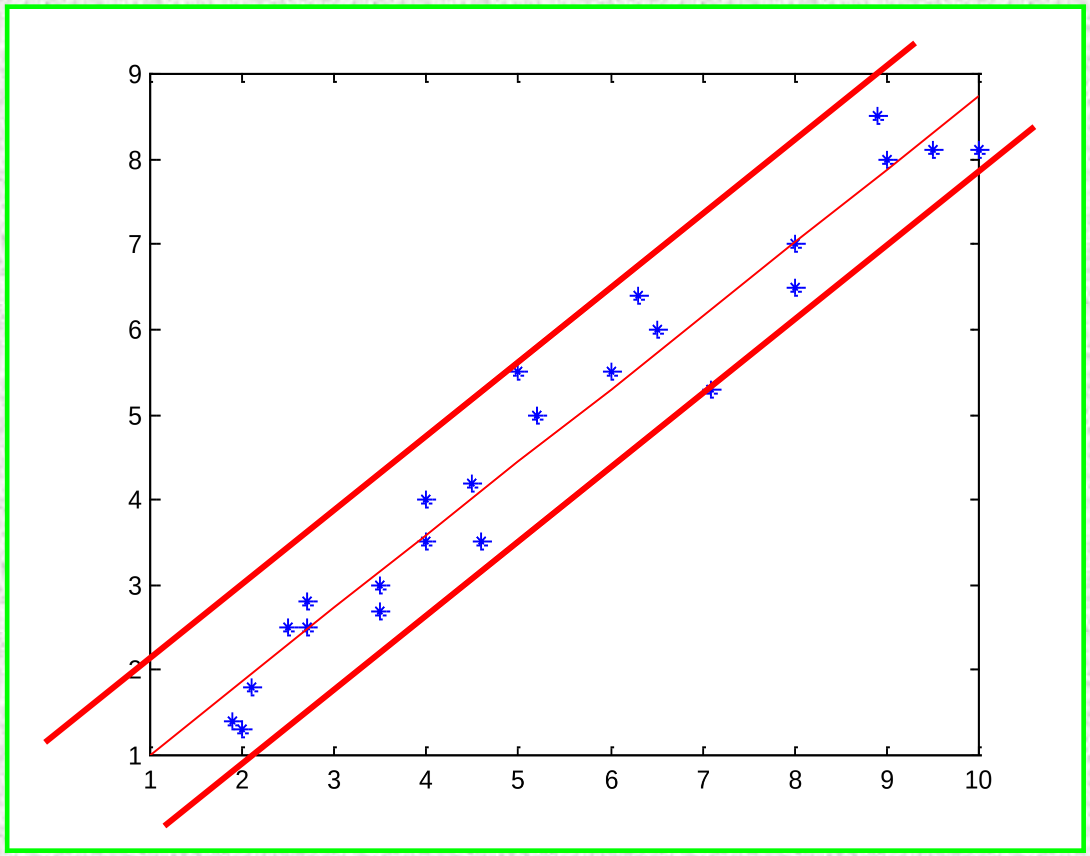
由Matlab做图(或经验公式),

x,y之间近似存在线性关系,

即:

$$\boxed{y(x)=\beta_0+\beta_1 x}$$

其中β_0,β_1待定。



希望:$y(x)=\beta_0+\beta_1 x$与所有的数据点(x_i,y_i)越接近越好!

即:若记$\delta_i=y(x_i)-y_i(i=1,2,\cdots,n)$,

要求其在“某种标准”下“整体”最小!

衡量标准:要求$\max\limits_{1\le i\le n}|\delta_i|$、$\sum\limits_{i=1}^{n}|\delta_i|$、$\boxed{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i^2}$等最小

选它,求解方便!即为曲线拟合问题

线性最小二乘拟合问题

设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$是$C[a,b]$上线性无关的函数族，对给定的数据$\left(x_i,y_i\right)\Big|_{i=0}^{m}$，要求在

$$\Phi = span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

$$=\left\{\varphi(x)\,|\,\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\right\}$$

中找一个函数

$$s^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$$

使得

$$\|\delta\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}\delta_i^2=\sum_{i=0}^{m}\left[s^*(x_i)-y_i\right]^2=\min_{s(x)\in\Phi}\left[s(x_i)-y_i\right]^2$$

其中

$$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)^T,m\gg n(\text{一般情况下}).$$

称函数$s^*(x)$为问题的最小二乘解。

求法

$\because s^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$，其中$\varphi_j(x)$为基函数(已知)。

$\therefore$ 求$s^*(x)\Leftrightarrow$ 求$a_0,a_1,\cdots,a_n$，使

$$Q(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x_i)-y_i\right]^2=\min$$

显然，Q是关于$a_0,a_1,\cdots,a_n$的二次多项式且正定

因此，一定存在最小值

由多元函数取得极值的必要条件，有

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j}=0\quad(j=0,1,\cdots,n)$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j}=\sum_{i=0}^{m}[2(\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x_i)-y_i)\varphi_j(x_i)]=0$$

亦即 $$\sum_{i=0}^{m}[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) - y_i\varphi_j(x_i)] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_j(x_i) \quad j = 0,1,\cdots,n$$

记向量 $$\varphi_k = (\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), \cdots, \varphi_k(x_m))^T \in R^m$$

$$y = (y_0, y_1, \cdots, y_m)^T \in R^m$$

则 $$\sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = (\varphi_k, \varphi_j) = \varphi_k^T \varphi_j$$

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) y_i = (\varphi_k, y) = \varphi_k^T y$$

故 $$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_j(x_i) \quad j = 0,1,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k (\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_j, y), j = 0,1,\ldots\ldots,n$$

--法方程组

即$a_0,a_1,\cdots,a_n$应满足：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi_k,\varphi_j)=(\varphi_j,y),\ j=0,1,\ldots\ldots,n$$

$$\begin{cases}(\varphi_0,\varphi_0)a_0+(\varphi_1,\varphi_0)a_1+(\varphi_2,\varphi_0)a_2+\cdots+(\varphi_n,\varphi_0)a_n=(\varphi_0,y) & j=0\text{时}\\ (\varphi_0,\varphi_1)a_0+(\varphi_1,\varphi_1)a_1+(\varphi_2,\varphi_1)a_2+\cdots+(\varphi_n,\varphi_1)a_n=(\varphi_1,y) & j=1\text{时}\\ (\varphi_0,\varphi_2)a_0+(\varphi_1,\varphi_2)a_1+(\varphi_2,\varphi_2)a_2+\cdots+(\varphi_n,\varphi_2)a_n=(\varphi_2,y) & j=2\text{时}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (\varphi_0,\varphi_n)a_0+(\varphi_1,\varphi_n)a_1+(\varphi_2,\varphi_n)a_2+\cdots+(\varphi_n,\varphi_n)a_n=(\varphi_n,y) & j=n\text{时}\end{cases}$$

表示为矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,y)\\ (\varphi_1,y)\\ (\varphi_2,y)\\ \cdots\\ (\varphi_n,y)\end{pmatrix}$$

--法方程组的内积形式

再记：
$$G=\begin{pmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0)\\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n\end{pmatrix}$$

则
$$G^TG=\begin{pmatrix}\varphi_0^T\\ \varphi_1^T\\ \vdots\\ \varphi_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_0^T\varphi_0 & \varphi_0^T\varphi_1 & \cdots & \varphi_0^T\varphi_n\\ \varphi_1^T\varphi_0 & \varphi_1^T\varphi_1 & \cdots & \varphi_1^T\varphi_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \varphi_n^T\varphi_n & \varphi_n^T\varphi_n & \cdots & \varphi_n^T\varphi_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

$$G^Ty=\begin{pmatrix}\varphi_0^T\\ \varphi_1^T\\ \vdots\\ \varphi_n^T\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}\varphi_0^Ty\\ \varphi_1^Ty\\ \vdots\\ \varphi_n^Ty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,y)\\ (\varphi_1,y)\\ \vdots\\ (\varphi_n,y)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 法方程组的内积形式

$\Leftrightarrow G^TGa=G^Ty$

--法方程组的矩阵形式

几点备注

1、法方程组$G^TGa = G^Ty$一定有解！

证明：往证 $R(G^TG) = R(G^TG, G^Ty)$

由线性代数可知下式成立

$$R(G) = R(G^T) = R(G^TG)$$

又因为

$$R(G^TG) \le R(G^TG, G^Ty) = R\left(G^T(G, y)\right) \le R(G^T) = R(G^TG)$$

所以 $$R(G^TG) = R(G^TG, G^Ty)$$

2　设法方程组$G^TGa=G^Ty$的解为 $a^*=(a_0^*,a_1^*,\cdots,a_n^*)^T\in R^{n+1}$

则函数 $s^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$ 就是最小二乘解！

证明　设 $s(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$

则 $$Q=\sum_{i=0}^{m}\left(s(x_i)-y_i\right)^2=\left\|\begin{pmatrix}s(x_0)-y_0\\ s(x_1)-y_1\\ \vdots\\ s(x_m)-y_m\end{pmatrix}\right\|_2^2=\left\|\begin{pmatrix}s(x_0)\\ s(x_1)\\ \vdots\\ s(x_m)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right\|_2^2=\|Ga-y\|_2^2$$

因此最小二乘问题等价为：求$a\in R^{n+1}$，使得

$$Q=\|Ga-y\|_2^2=\min$$

又因为对$\forall\alpha\in R^{n+1}$，$\alpha=\alpha^*+c$

$$G=\begin{pmatrix}\varphi_0(x_0)&\varphi_1(x_0)&\cdots&\varphi_n(x_0)\\ \varphi_0(x_1)&\varphi_1(x_1)&\cdots&\varphi_n(x_1)\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \varphi_0(x_m)&\varphi_1(x_m)&\cdots&\varphi_n(x_m)\end{pmatrix}$$

因此 $\|Ga-y\|_2^2=\|G(a^*+c)-y\|_2^2=\|Ga^*-y+Gc\|_2^2$

$$=\left(Ga^*-y+Gc\right)^T\left(Ga^*-y+Gc\right)$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+2c^TG^T(Ga^*-y)+\|Gc\|_2^2$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+2c^TG^T(Ga^*-y)+\|Gc\|_2^2$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+2c^T\left(G^TGa^*-G^Ty)\right)+\|Gc\|_2^2$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+\|Gc\|_2^2\geq\|Ga^*-y\|_2^2$$

即： 法方程组的解a^*使得$Q=\sum_{i=0}^{n}\left(s(x_i)-y_i\right)^2$达到最小！

3 最小二乘解的唯一性

当矩阵$G=\left(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\right)$列满秩时，$G^TG$可逆，法方程$G^TGa=G^Ty$有唯一解：

$$a^*=\left(G^TG\right)^{-1}G^Ty$$

最小二乘问题有唯一解！

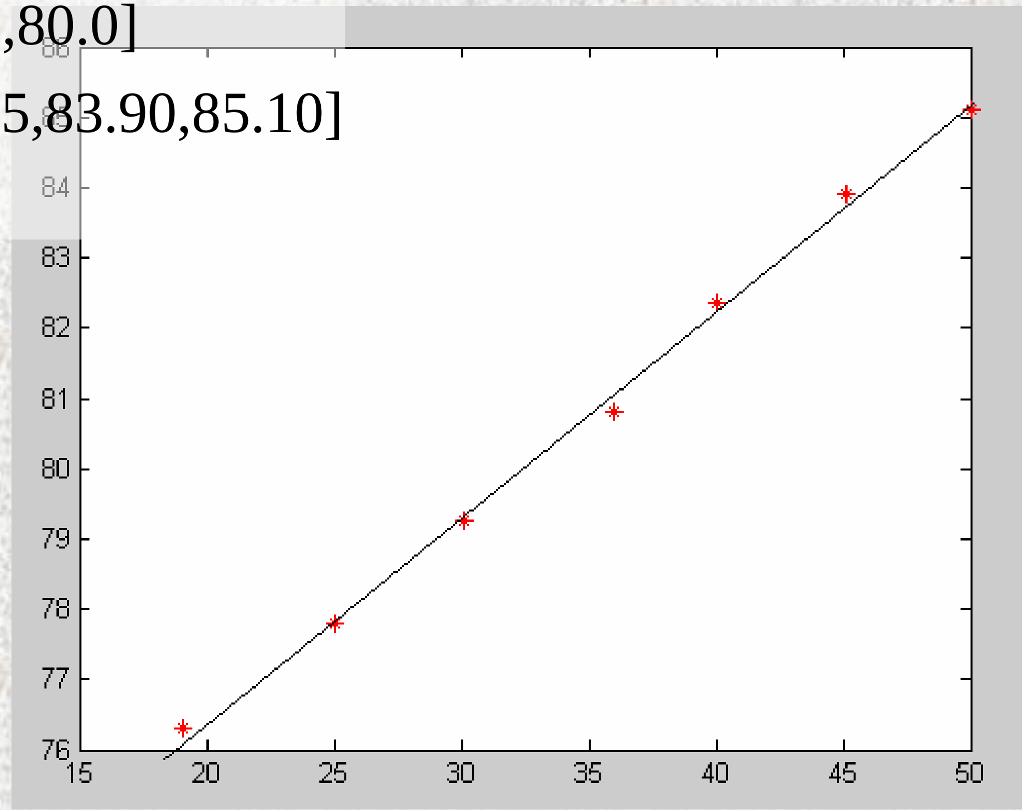
应用求解举例

例1 测得温度*t*和铜导线电阻*R*的关系数据表，试确定*R*和*t*的近似表达式．

t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	80.0
R	76.30	77.80	79.25	80.80	82.35	83.90	85.10

解 利用Matlab作图：

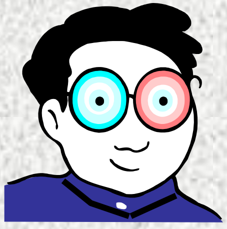
```
x=[19.1,25.0,30.1,36.0,40.0,45.1,80.0]
y=[76.30,77.80,79.25,80.80,82.35,83.90,85.10]
plot(x,y,'*')
```



易见R,t之间存在线性关系

$$R = a_0 + a_1 t$$

所以 $\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t$



t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	80.0	$\varphi_0(t)=1$
R	76.30	77.80	79.25	80.80	82.35	83.90	85.10	$\varphi_1(t)=t$

$$G=(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}76.30\\ 77.80\\ 79.25\\ 80.80\\ 82.35\\ 83.90\\ 85.10\end{pmatrix}\quad G^TG=\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}$$

法方程组 $G^TGa=G^TR$ $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7 & 245.3\\ 245.3 & 9325.83\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}565.5\\ 20029.445\end{pmatrix}$

解得 $a_0=70.572, a_1=0.291$

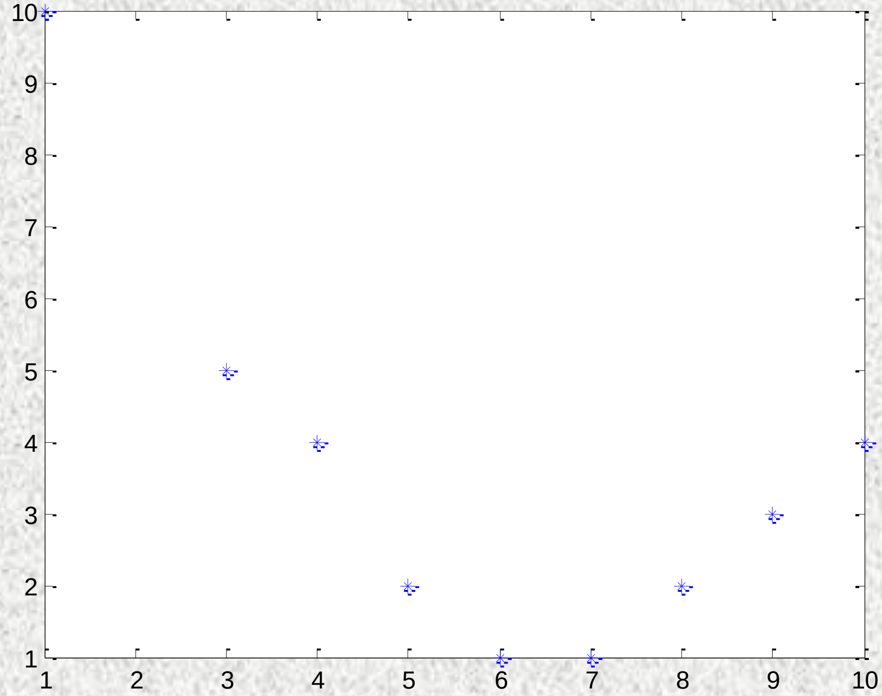
所以 $R=70.572+0.291t$

例2 已知一组实验数据如下，求它的拟合曲线.

x	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y	10	5	4	2	1	1	2	3	4

解 利用Matlab作图:

```
x=[1,3,4,5,6,7,8,9,10]
y=[10,5,4,2,1,1,2,3,4]
plot(x,y,'*')
```



可见它近似为一条抛物线.

设$y=a_0+a_1x+a_2x^2$,则

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2$$

$$G=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&9\\1&4&16\\1&5&25\\1&6&36\\1&7&49\\1&8&64\\1&9&81\\1&10&100\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}10\\5\\4\\2\\1\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$G^TG=\begin{pmatrix}9&53&381\\53&381&3017\\381&3017&25317\end{pmatrix}$$

$$G^Ty=\begin{pmatrix}32\\147\\1025\end{pmatrix}$$

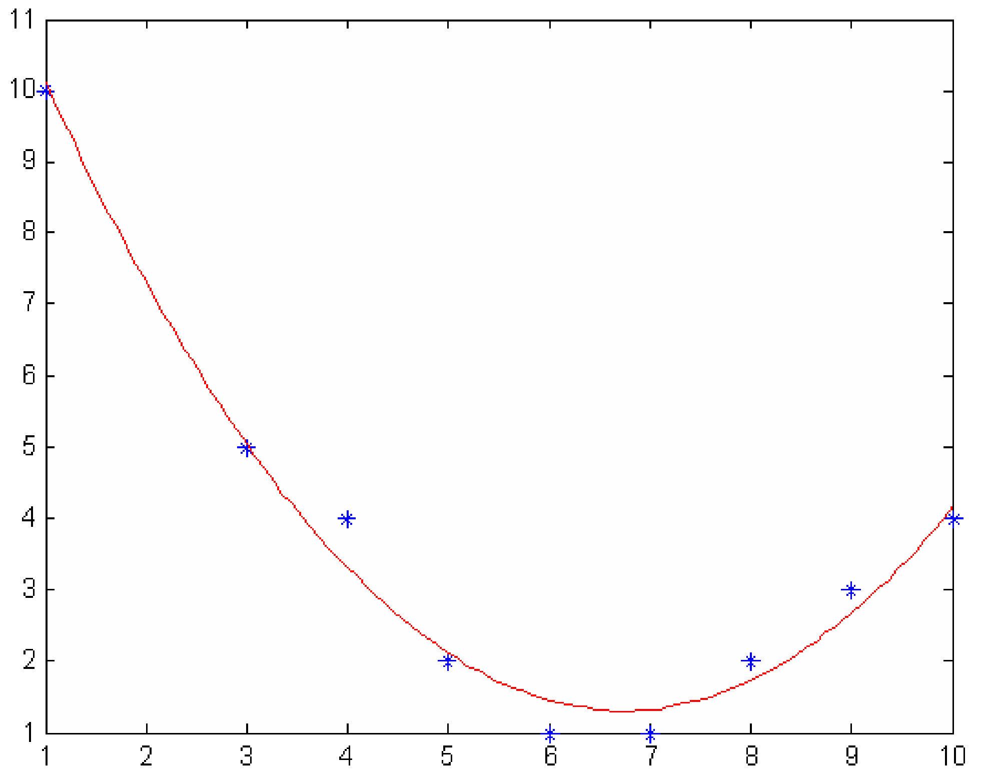
由法方程组:$G^TGa=G^Ty$，解得

$$a_0=13.45966, a_1=-3.60531，a_2=0.26757$$

所以 $$y=13.45966-3.60531x+0.26757x^2$$

✓ Matlab中多项式曲线拟合命令

```
x=[1,3,4,5,6,7,8,9,10];   %拟合数据
y=[10,5,4,2,1,1,2,3,4];
n=2;  %拟合多项式的次数
p=polyfit(x,y,n);  %拟合多项式
xi=linspace(1,10);
yi=polyval(p,xi);
plot(x,y,'*',xi,yi,'r');
```



运行结果:

p =   0.2676   -3.6053   13.4597

$(y=0.2676x^2-3.6053x+13.4597)$

例3 对彗星1968Tentax的移动在某个极坐标系下的观察数据如下

r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
φ	48°	67°	83°	108°	126°

假设忽略来自行星的干扰，坐标应满足$r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$，其中$p$为参数，$e$为偏心率. 试用最小二乘法拟合$p$和$e$，并给出平方误差.

解 【本问题是非线性曲线拟合】

由于r关于p和e是非线性的，变形为$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{e}{p}\cos\varphi$，可得下表数据

$y=\dfrac{1}{r}$	0.370370	0.500000	0.621118	0.833333	0.980392
$t=\cos\varphi$	0.669131	0.390731	0.121869	−0.309017	−0.587785

记$a=\dfrac{1}{p}, b=-\dfrac{e}{p}$得拟合模型：$y=a+bt$

解法方程组得：$a=0.688617, b=-0.483880$

所以$p=\dfrac{1}{a}=1.452186, e=-bp=0.702684$，$r=\dfrac{1.452186}{1-0.702684\cos\varphi}$

平方误差：

$$\delta^2=\sum_{j=0}^{4}\left(r_j-r(\varphi_j)\right)^2=0.002262$$

§1 函数的最佳逼近

用简单的函数$p(x)$近似地代替函数$f(x)$，是计算数学中最基本的概念和方法之一。近似代替又称为逼近，函数$f(x)$称为被逼近的函数，$p(x)$称为逼近函数，两者之差

$$R(x) = f(x) - p(x)$$

称为逼近的误差或余项。

预备知识：连续函数空间C[a,b]

1 函数的内积

1) 定义

设$f(x),g(x)\in C[a,b],\rho(x)\geq 0$是$[a,b]$上的权函数，则称：

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

为$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上以$\rho(x)$为权函数的内积.

定义了内积运算的连续函数空间又成为内积空间.

2) 内积的性质

(1) $(f,f)\geq 0$，且$(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$;

(2) $(f,g)=(g,f)$;

(3) $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$;

(4) $(kf,g)=k(f,g)$，其中$k\in R$.

2 正交函数系

1) $f(x)$与$g(x)$正交

设$f(x), g(x) \in C[a,b], \rho(x) \geq 0$为权函数，如果

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交。

2) 正交函数系

若$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$，满足:

$$\left(\varphi_j,\ \varphi_k\right)=\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \quad (j,\ k = 0,\ 1,\ \cdots) \end{cases}$$

其中A_k是常数，则称$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$为正交函数系。

特别地，若$A_k \equiv 1$,则称为标准正交函数系

如：1，cos$x$，sin$x$，cos2x，sin2x，…，connx，sinnx，…
是$[-\pi, \pi]$的正交函数系！

3函数的范数

1）定义 设$\|\cdot\|$是线性空间$C[a,b]$到非负实数$\mathbf{R}^+$上的一个映射，如果满足：

(1) $\|f\| \ge 0$，且$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$，$\forall f \in C[a,b]$;

(2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$，$\forall f \in C[a,b], \forall \alpha \in R$;

(3) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in C[a,b]$

则称$\|\cdot\|$为$C[a,b]$上的范数。

2）常用范数

$\|f\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$ ——∞范数或最大值范数；

$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$ ——2范数或欧式范数；

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$ ——1范数.

3）勾股定理

如果$f(x)$与$g(x)$正交，即$(f,g)=0$，则$\|f+g\|_2 = \|f\|_2 + \|g\|_2$。

4) $C[a,b]$中的距离

设$f, g \in C[a,b]$，称$d(f,g) = \|f-g\|_\alpha \ (\alpha = 1, 2, \infty)$为$f, g$之间的距离.

函数逼近问题

对于函数类A中给定的函数$f(x)$，要求在另一类较简单且便于计算的函数类B中寻找一个函数$p(x)$，使$p(x)$和$f(x)$之差在$\boxed{\text{某种度量}}$意义下最小。

对给定$f(x)$和函数类$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$，其中$f(x),\varphi_i(x)\in C[a,\ b]$且$\varphi_i(x)$线性无关，求$\varphi^*(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i(x)\in\Phi$

使得

$$\left\|f(x)-\varphi^*(x)\right\|=\min_{\varphi\in\Phi}\left\|f(x)-\varphi(x)\right\|$$

则称$\varphi^*(x)$是$f(x)$的最佳逼近。

注：若$\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$，则称为最佳一致逼近；

若$\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$，则称为最佳平方逼近。

函数的最佳平方逼近

1 定义

求$\varphi^*(x)\in\Phi$，满足

$$\left\| f(x)-\varphi^*(x)\right\|_2^2=\min_{\varphi\in\Phi}\left\| f(x)-\varphi(x)\right\|_2^2$$

即

$$\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\varphi^*(x)\right)^2 dx=\min_{\varphi(x)\in\Phi}\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2 dx$$

称$\varphi^*(x)$是$f(x)$的最佳平方逼近。

2 求法 假设$\varphi^*(x)$存在，考察$\{a_j^*\}$应满足必要条件

对$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\in\Phi$，令

$$Q(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\|f-\varphi\|_2^2=\int_a^b\rho(x)[(f(x)-\varphi(x))]^2dx$$

由多元函数取得极值的必要条件知：$\dfrac{\partial Q}{\partial a_i}=0\ (i=0,1,\cdots,n)$

即 $$\frac{\partial Q}{\partial a_i}=-2\int_a^b\rho(x)\left[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\right]\varphi_i(x)dx=0\ (i=0,1,\cdots,n)$$

即 $$\int_a^b\rho(x)f(x)\varphi_i(x)dx=\int_a^b\rho(x)\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\cdot\varphi_i(x)dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\int_a^b\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx\cdot a_j\ (i=0,1,\cdots,n)$$

内积形式： $$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)\cdot a_j=(f,\varphi_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)\cdot a_j=(f,\varphi_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$$

因此，若$\varphi(x)$若是$f(x)$的最佳平方逼近，则a_j应满足：

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\(\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\ \vdots\\(\varphi_n,f)\end{bmatrix}$$

记作：$Ga=d$，从中解出$a_i^*\ (i=0,1,2,\cdots,n)$

--法方程组！

则

$$\varphi^*(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^*\varphi_i(x)$$

3 下面证明 对$\forall \varphi(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)\in\Phi$，都有$\|f-\varphi\|_2^2\ge\|f-\varphi^*\|_2^2$

因为 $$\|f-\varphi\|_2^2=(f-\varphi,f-\varphi)=(f-\varphi^*+\varphi^*-\varphi,f-\varphi^*+\varphi^*-\varphi)$$

$$=(f-\varphi^*,f-\varphi^*)+(\varphi^*-\varphi,\varphi^*-\varphi)+2(f-\varphi^*,\varphi^*-\varphi)$$

因为$a_i^*(i=0,1,2,\cdots,n)$是$Ga=d$的解，即

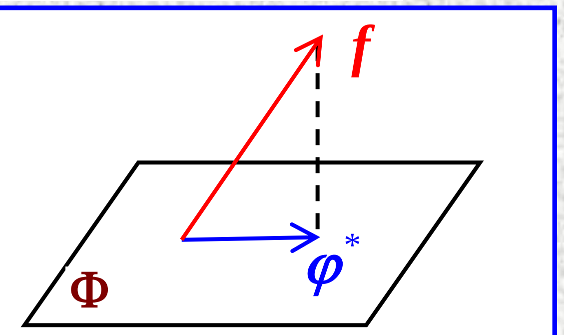
$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)\cdot a_j^*=(f,\varphi_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow\quad (\varphi_i,a_0^*\varphi_0)+(\varphi_i,a_1^*\varphi_1)+\cdots+(\varphi_i,a_n^*\varphi_n)=(f,\varphi_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow\quad (\varphi_i,\varphi^*)=(f,\varphi_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow\quad (f-\varphi^*,\varphi_i)=0(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow\quad f-\varphi^*\perp\Phi$$



$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$

而$\varphi^*-\varphi=\sum_{j=0}^{n}(a_j^*-a_j)\varphi_j(x)\in\Phi$，所以$(f-\varphi^*,\varphi^*-\varphi)=0$

所以 $$\|f-\varphi\|_2^2=\|f-\varphi^*\|_2^2+\|\varphi^*-\varphi\|_2^2\ge\|f-\varphi^*\|_2^2$$

4 平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = \|f-\varphi^*\|_2^2 = (f-\varphi^*, f-\varphi^*) = (f, f-\varphi^*) = \|f\|_2^2 - \sum a_i^*(\varphi_i, f)$$

均方误差：$\|\delta\|_2$

5 最佳多项式平方逼近

设$f(x)\in C[0,1]$，取$\Phi = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}, \rho(x)=1$，则

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^{i+j}dx = \frac{1}{i+j+1}$$

所以$G\vec{a} = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \vdots \\ (\varphi_n, f) \end{bmatrix}$

从中解出a_i，代入$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

例1 求$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在[0,1]上一次最佳平方逼近多项式.

解 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$

$$d_0=(f,\varphi_0)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}=1.1478$$

$$d_1=(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)=0.6.95$$

由 $$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147\\ 0.609\end{bmatrix}$$

解得 $a_0=0.9348, a_1=0.4269$

所以 $P_1^*(x)=0.9343+0.4269x$

平方误差 $\|\delta\|_2^2=\|f\|_2^2-(a_0d_0+a_1d_1)$

$$=\int_0^1(1+x^2)dx-(0.9348*1.147+0.4269*0.609)$$

$$=7.1293\times10^{-4}$$

例2　求$f(x)=\cos\pi x$在[0,1]上的最佳一次平方逼近多项式。

解 [$\rho(x)\equiv 1$的情形]

取$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,H=span\{1,x\}.$

$\therefore$ $(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1dx=1$　$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$　$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

$(f,\varphi_0)=\int_0^1 \cos\pi x dx=0$　$(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\cos\pi x dx=-\frac{2}{\pi^2}$

$\therefore$法方程组为：$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2/\pi^2 \end{pmatrix}$

解得：$a_0=1.2159,$　$a_1=-2.4317$

$\therefore$ $f(x)=\cos\pi x$在[0,1]上的最佳一次平方逼近多项式为

$$p(x)=1.2159-2.4317x$$

例3 求$f(x)=5x^3$在 [0,1] 上形如$P(x)=a+bx^2$最佳平方逼近多项式.

5 正交多项式情形

设$H_n = Span\{1, x, \cdots, x^n\}$，给定$\rho(x)$，则由$\{1, x, \cdots, x^n\}$利用施密特正交化方法，可构造$[a,b]$上的正交多项式系$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(x^n, \varphi_j(x)\right)}{\left(\varphi_j(x), \varphi_j(x)\right)} \varphi_j(x), \quad (n = 1, 2, \cdots,)$$

✓ 勒让德多项式

若取$[a,b]=[-1,1], \rho(x) \equiv 1$，则由$\{1, x, \cdots, x^n\}$正交化得到的多项式，称为勒让德多项式。

➢ 表达式 $P_0(x) = 1$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} (2n)(2n-1) \cdots (n+1) x^{2n} + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

➢ 性质

1）正交性
$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

2）奇偶性
$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

3）递推关系式
$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$$
$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}\left[(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)\right](n=1,2,3,\cdots)$$

4）$P_n(x)$在$[-1,1]$上有$n+1$个互异零点.

5）在首项系数为1的所有n次多项式$f(x)$中，$\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}p_n(x)$与0的平方误差最小，即：
$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}p_n(x)\right]^2dx\le\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx$$

例3　求$f(x)=2x^3+x^2-2x-1$在$[-1,1]$上二次最佳平方逼近多项式。

解　设$P^*(x)$为所求多项式，则

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-P_2^*(x)]^2dx=\min_{P(x)\in H_2}\int_{-1}^{1}[f(x)-P_2(x)]^2dx$$

由性质5,应有

$$\frac{1}{2}[f(x)-P_2^*(x)]=\frac{2}{5}P_3(x)$$

其中

$$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$$

所以

$$P_2^*(x)=f(x)-\frac{4}{5}P_3(x)=x^2-\frac{4}{5}x-1$$

✓ 取正交多项式做最佳平方逼近的法方程组

在$[-1,1]$上选取勒让德多项式$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$为基函数，则

法方程组$Ga=d$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \cdots\cdots & & & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{bmatrix}$$

$$\therefore a_k = \frac{(\varphi_k,f)}{(\varphi_k,\varphi_k)} = \frac{\int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b \rho(x)\varphi_k^2(x)dx}$$

例4【P87】求$f(x)=e^{-x}$在区间$[-1,1]$上的三次最佳平方逼近多项式.

例5 求$f(x)=e^{-x}$在$[0,1]$上的二次最佳平方逼近多项式.

解 令$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$，即$t=2x-1$，代入$f(x)$得：$F(t)=e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}$

$$p_0(x)=1,\ p_1(t)=t,\ p_2(t)=\frac{3t^2-1}{2}$$

一般区间上$f(x)\in[a,b]$,则令

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\ (-1\le t\le 1)$$

✓ Chebyshev多项式【自学】

$$a_0=\frac{(F,p_0)}{(p_0,p_0)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt=1.7183$$

$$a_1=\frac{(F,p_1)}{(p_1,p_1)}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}te^{\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt=0.8452$$

$$a_2=\frac{(F,p_2)}{(p_2,p_2)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3t^2-1}{2}e^{\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt=0.1399$$

$$\therefore\ p_2(t)=a_0+a_1t+a_2\cdot\frac{3t^2-1}{2}=0.2098t^2+0.8452t+1.6483$$

$$p_2(x)=a_0+a_1(2x-1)+a_2\cdot\frac{3(2x-1)^2-1}{2}$$

$$=0.2098(2x-1)^2+0.8452(2x-1)+1.6483$$