数学分析 第七章 实数的完备性

数列的上极限与下极限是非常有用的概念,通过它们可得出数列极限存在的另一个充要条件.在下册第十二、十四章讨论级数收敛性时,常会遇到所考虑的某些数列不存在极限的情形,那时需要用上极限或下极限来解决问题.此外,对于不少后继课程来说,上(下)极限也是不可缺少的工具.

*§2 上极限和下极限

一、上(下)极限的基本概念

二、上(下)极限的基本性质

*点击以上标题可直接前往对应内容

第五讲

上下极限的基本概念

上(下)极限的基本概念

定义1

若数列 $\{x_n\}$ 满足: 在数 x_0 的任何一个邻域内均含有 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 则称 x_0 是数列 $\{x_n\}$ 的的一个聚点.

注 点集的聚点与数列的聚点之间的区别在于: 前者要求 “含有无限多个点”, 后者要求 “含有无限多个项”. 现举例如下:

常数列 $(a_n \equiv a)$ 只有一个聚点: a.

$\{(-1)^n\}$ 作为点集来说它仅有两个点，故没有聚点；但作为数列来说，它却有两个聚点：1 和 -1.

数列 $\{\sin\frac{n\pi}{4}\}$ 有五个聚点：$-1, -\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 1$.

从数列聚点的定义不难看出，x_0 是数列 $\{x_n\}$ 的聚点的一个充要条件是：存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$,

$$x_{n_k} \to x_0,\ k \to \infty.$$

定理7.4

有界数列至少存在一个聚点，并且有最大聚点和最小聚点.

证 设 $\{x_n\}$为有界数列, 由致密性定理, 存在一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0 (k \to \infty)$, 于是 x_0是$\{x_n\}$的一个聚点.

又设 $E = \{ x \mid x 是 \{x_n\} 的聚点 \}$, 由于 E 非空有界, 故由确界原理, 存在

$$\overline{A} = \sup E, \quad \underline{A} = \inf E.$$

下面证明 $\overline{A}$ 是 $\{x_n\}$ 的最大聚点, 亦即 $\overline{A} \in E$.

首先, 由上确界的性质, 存在$\{a_k\} \subset E$,使 $a_k \to \overline{A}$.

因为 a_k 是 $\{x_n\}$ 的聚点, 所以对任意正数 ε, 在区间 $(a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$的无限多项.

现依次令

$$\varepsilon_1 = 1,\ \text{存在}\ x_{n_1},\ \text{使}\ |x_{n_1} - a_1| < 1;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2},\ \text{存在}\ x_{n_2}(n_2 > n_1),\ \text{使}\ |x_{n_2} - a_2| < \frac{1}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k},\ \text{存在}\ x_{n_k}(n_k > n_{k-1}),\ \text{使}\ |x_{n_k} - a_k| < \frac{1}{k};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样就得到了 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - a_k) + \lim_{k\to\infty} a_k = \overline{A},$$

即证得 $\overline{A}$ 也是 $\{x_n\}$的一个聚点, 所以 $\overline{A} \in E$.

同理可证 $\underline{A} \in E$.

定义2

有界数列$\{x_n\}$的最大聚点 $\overline{A}$ 与最小聚点 $\underline{A}$ 分别称为$\{x_n\}$的上、下极限，记为

$$\overline{A}=\varlimsup_{n\to\infty} x_n,\quad \underline{A}=\varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

注 由定理 7.4 得知，有界数列必有上、下极限. 这样，上、下极限的优越性就显现出来了：一个数列若有界，它的极限可以不存在，此时想通过极限来研究该数列往往是徒劳的；但是有界数列的上、下极限总是存在的，这为研究数列的性质 提供了一个新的平台.

例1 考察以下两个数列的上、下极限:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=0\ (=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n});$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n\frac{n}{n+1}=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n\frac{n}{n+1}=-1.$$

从中可大致看出数列的极限和数列的上、下极限之间存在着的内在联系.