# 第四讲

# 函数单调性的判别

# 函数单调性的判别

若函数 $f(x)$在区间 $I$上对任意 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$，必有 $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间 $I$上单调增（单调减）. 若"$\le$ ($\ge$)"改为严格不等号，则相应地称它为严格增 (减).

下面的定理是本节中的两个主要定理, 今后将不断地使用.

我们仅对单调增的情形给出证明，单调减的情形请读者自证

**定理6.3**

设 $f(x)$在区间 $I$上可导, 则 $f(x)$在区间 $I$上单调增(减)的充要条件是: $f'(x) \geq 0 \ (\leq 0)$.

证 若 $f$ 为递增函数, 则当 $x, x_0 \in I, x \neq x_0$时，有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

令 $x \to x_0$, 即得 $f'(x_0) \geq 0$.

反之, 若 $f'(x) \geq 0, x \in I$. $\forall x_1, x_2 \in I$ (设$x_1 < x_2$), 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

即 $f(x_2) \geq f(x_1)$, 这就证明了函数 $f(x)$ 递增.

## 定理6.4

可微函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上严格增(减)的充要条件是：对一切$x \in I$, $f'(x) \geq 0$($f'(x) \leq 0$), 且满足 $f'(x)=0$ 的点集不含一个区间.

证 充分性 由定理6.3可知 $f(x)$递增. 若$f(x)$不是严格递增, 则存在 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2)$. 这就得到 $f(x)$在区间$(x_1, x_2)$上恒为常数, 因此 $f'(x) \equiv 0$, $x \in (x_1, x_2)$, 矛盾.

必要性请读者自证.

**推论**

设函数在区间 $I$ 上可微，若 $f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$，则 $f$ 在 $I$ 上严格增(严格减).

在实际应用中我们经常会用到下面这个事实.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上(严格)增(减)，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(严格)增(减).

作为应用，下面再举两个简单的例子.

**例7** 设 $f(x)=x^3-x$. 讨论函数 $f$ 的单调区间.

**解** 由于 $f'(x)=3x^2-1=(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)$,

因此当 $x\in(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ 时,

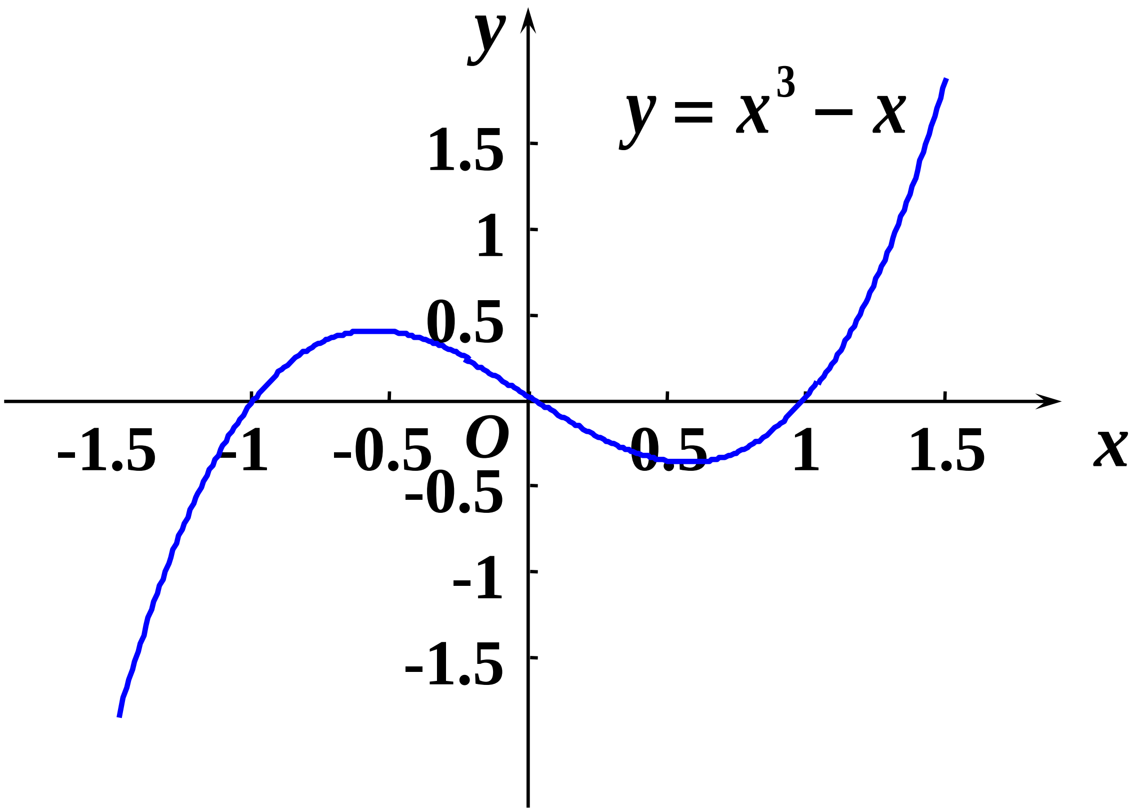
$$f'(x)>0,\quad f \text{ 在} \left(-\infty,\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \text{上严格增},$$

当 $x\in(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ 时,

$$f'(x)<0,\quad f \text{ 在} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \text{上严格减},$$

当 $x\in(\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 时,

$$f'(x)>0,\quad f \text{ 在} \left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right) \text{上严格增}.$$



$y$
$y = x^3 - x$
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
$O$
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
$x$

例8 证明 $\mathrm{e}^x > 1 + x, x > 0$.

证 设 $F(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$, 则$F'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. 所以

$F'(x) \geq 0, x \in [0, +\infty)$, 且当$x > 0$时，$F'(x) > 0$

( $F'(x) = 0$的点不含一个区间 ). 故$F(x)$在$[0, +\infty)$

上严格递增，所以对任意$x > 0$，恒有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

即

$$\mathrm{e}^x > 1 + x, x > 0.$$

## 定理6.5（达布定理）

如果 $f$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，$k$ 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $c \in (a,b)$，使得

$$f'(c) = k.$$

达布定理有时也称“导函数介值定理”.

达布（Darboux,J.G. 1842-1917, 法国）

证 令 $F(x)=f(x)-kx$, 则 $F'(x)=f'(x)-k$. 根据费马定理, 只要证明 $F(x)$ 在 $(a,b)$ 上有极值点即可.

由于 $F'_+(a)\cdot F'_-(b)=(f'_+(a)-k)\cdot(f'_-(b)-k)<0$, 可设 $F'_+(a)>0$, $F'_-(b)<0$. 由第五章第四讲中的例11, 分别存在 $x_1\in U^\circ_+(a)$, $x_2\in U^\circ_-(b)$, 且 $x_1<x_2$, 使得

$$F(x_1)>F(a),\ F(x_2)>F(b).$$

由此可知, $[a,b]$ 上的连续函数 $F$, 其最大值必在某一点 $c\in(a,b)$ 处取得. 区间内取得的最大值一定是极大值, 由费马定理得 $F'(c)=0$, 即

$$f'(c)=k,\quad c\in(a,b).$$

根据达布的“导函数介值定理”，可得下面推论：

**推论1**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上满足 $f'(x) \neq 0$，那么 $f(x)$ 在区间 $I$ 严格单调.

**推论2**

如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上可导，那么 $f'(x)$ 在 $I$ 上就没有第一类间断点.

# 复习思考题

罗尔定理证明的主要方法是什么? 试与达布定理的证明相比较.