第十四讲

习题课(三)

重要内容回顾

1. 高阶导数，莱布尼茨公式；
2. 参变量函数的二阶导数；
3. 微分，一阶微分形式的不变性；
4. 高阶微分；
5. 微分在近似计算中的应用.

补充例题

例1 设 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，$x=\varphi(y)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\varphi'(y)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{\varphi'(y)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{-\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^2}\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{-\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}.$$

例2 设 $f(t)$ 二阶可导, $f'(t)\neq 0$. 求参变量函数

$$\begin{cases} x = f'(t) \\ y = t f'(t) - f(t) \end{cases}$$

的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f'(t) + t f''(t) - f'(t)}{f''(t)}$$

$$= t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{1}{f''(t)}.$$

例3 计算 $y=x^2\sin x$ 的80次导数 $(x^2\sin x)^{(80)}$.

解 $\because\ (x^2)'''=0$, 所以，利用莱布尼茨公式

$$(x^2\sin x)^{(80)}=x^2(\sin x)^{(80)}+C_{80}^1(x^2)'(\sin x)^{(79)}+C_{80}^2(x^2)''(\sin x)^{(78)}$$

$$=x^2\sin x-160x\cos x-3160\cdot 2\cdot\sin x$$

$$=(x^2-6320)\sin x-160x\cos x$$

注意到： $(\sin x)^{(4)}=\sin x$; $(\sin x)'''=-\cos x$;

$(\sin x)''=-\sin x$;

例4 设 $y=\arcsin x$，计算$y^{(n)}(0)$.

解 直接求是困难的，关键是找到递推关系.

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，得到 $y'\sqrt{1-x^2}=1$. 两边再求导

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

整理后有

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

两边用莱布尼茨公式求 n 阶导数，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-(xy^{(n+1)}+ny^{(n)})=0,$$

或 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$

以 $x=0$ 代入 $y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0.$

由 $y(0)=0$, 递推得到

$$y^{(2k)}(0)=0 \quad (k=0,1,2,\ldots);$$

由 $y'(0)=1$, 递推得到

$$y'''(0)=1^2=1,\ y^{(5)}(0)=3^2\cdot 1^2,$$

$$y^{(7)}(0)=5^2\cdot 3^2\cdot 1^2 =(5!!)^2,\quad \cdots\cdots,$$

$$y^{(2k+1)}(0)=\left[(2k+1)!!\right]^2,\ (k=0,1,2,\ \ldots).$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$$

计算 $y^{(n)}(0)=(\arcsin x)^{(n)}(0).$

例5 利用一阶微分形式的不变性计算 $y = \mathrm{e}^{\sin(ax+b)}$ 的导数和微分.

解

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\sin(ax+b)} = \mathrm{e}^{\sin(ax+b)}\,\mathrm{d}\sin(ax+b)$$

$$= \cos(ax+b)\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}\,\mathrm{d}(ax+b)$$

$$= a\cos(ax+b)\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$y' = a\cos(ax+b)\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}.$$

例6 设 $u=u(x)$ 二阶可导，$y=\ln u$，求 d^2y.

解法1 按二阶微分定义.

因为

$$y'=\frac{u'}{u},\quad y''=\frac{u''u-u'^2}{u^2},$$

所以

$$\mathrm{d}^2y=y''\mathrm{d}x^2=\frac{u''u-u'^2}{u^2}\mathrm{d}x^2.$$

解法2 按微分运算法则.

$\mathrm{d}u=u'\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\frac{1}{u}\mathrm{d}u)=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u^2+\frac{1}{u}\mathrm{d}(\mathrm{d}u)$$

$$=-\frac{1}{u^2}(u'\mathrm{d}x)^2+\frac{1}{u}u''\mathrm{d}x^2=\frac{u''u-u'^2}{u^2}\mathrm{d}x^2.$$

殊途同归！