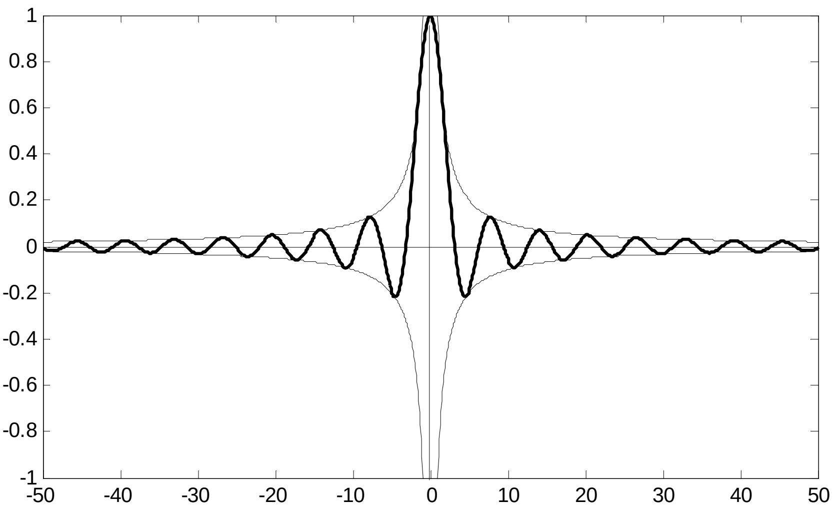
第三章 函数极限

§1　函数极限概念

引例 1　考察函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图象。$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|$



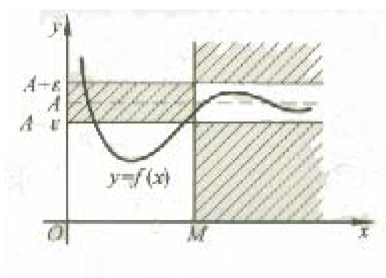
当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时，$y\to?$

定义 1　设 f 为定义在$[a,+\infty)$上的函数，A 为定数．若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M(\ge a)$，使得当 $x>M$ 时，有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

则称**函数 f 当 x 趋于$+\infty$ 时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$



类似可定义：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

显然：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

例 1 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

例 2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\le\frac{1}{x}$$

例 3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$

$$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|=\frac{3}{|x+2|}\le\frac{3}{|x|-2}<\varepsilon\Rightarrow|x|>\frac{3}{\varepsilon}+2$$

例 4［教材例 2］　证明：

$$（1）\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}；（2）\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

任给 $\varepsilon>0$ 由于

$$\left|\arctan x-(-\frac{\pi}{2})\right|<\varepsilon \qquad (2)$$

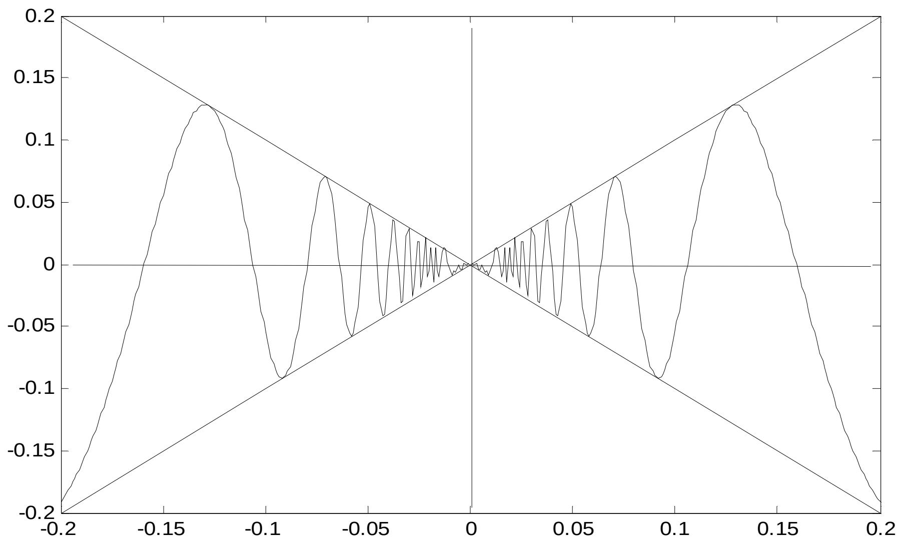
等价 $-\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}$，而此不等式的左半部分对任何 x 都成立，所以只要考察其右半部分 x 的变化范围．为此，先限制 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$x<\tan(\varepsilon-\frac{\pi}{2})=-\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon).$$

故对任给的正数 $\varepsilon(<\dfrac{\pi}{2})$，只需取 $M=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon)>0$，则当 $x<-M$ 时便有 (2) 式成立．这就证明了1)，类似地可证 2)．

【注】 当 $x\to\infty$ 时 $\arctan x$ 不存在极限．

引例 2 考察函数 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图象。$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$



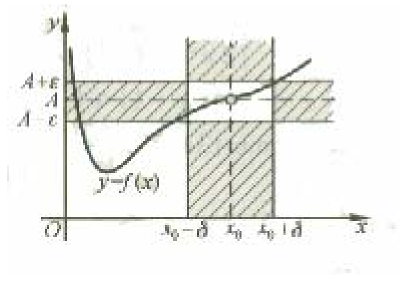
当 $x \to 0$ 时，$y \to ?$

定义 2　设函数 f 在点 x_0 的某个空心邻域 $U^{\circ}(x_0,\delta')$ 内有定义，A 为定数．若对任给的 $\varepsilon>0$ 存在正数 $\delta(<\delta')$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称**函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$



例 5　(1) $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$,　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$

例 6　$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

例 7［教材例 4］证明：(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$

（1）$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|$.

对任给的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$\left|\sin x-\sin x_0\right|<\varepsilon .$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

（2）$|\cos x-\cos x_0|=2|\sin\frac{x+x_0}{2}|\cdot|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|x-x_0|$

其他与（1）类似。

定义 3　设函数 f 在 $U_+^\circ\left(x_0,\delta'\right)$ 内有定义，A 为定数．若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta\left(<\delta'\right)$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有

$$\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$$

则称数 A 为函数 f 当 x 趋于 x_0^+ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=A \text{ 或 } f\left(x\right)\to A\left(x\to x_0^+\right)$$

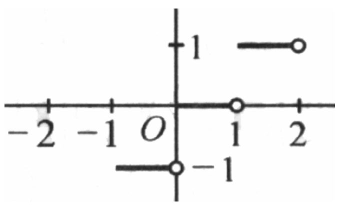
类似可定义**左极限**。右极限与左极限统称为**单侧极限**．f 在点 x_0 的右极限与左极限又分别记为

$$f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right) \quad\text{与}\quad f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)$$

显然

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=A=\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)$$

例 8 $f(x)=[x]$



$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

例 9［习题 3.1：习题 8，　参见教材第四章第 1 节例 3］

证明：对 Riemann 函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$，　$x_0\in[0,1]$（当 x_0 为端点时，极限是指单侧极限）。

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}(\text{既约真分数})\\ 0,\ x=0,1,(0,1)\text{内无理点}\end{cases}$$

$\forall\varepsilon>0$，$R(x)\ge\varepsilon \Leftrightarrow q\le\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的点 x 只有有限个有理点。设这有限个点为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$. 即 $R(x)$ 除了这有限个点之外，都是 $R(x)<\varepsilon$ 。

对于 $[0,1]$ 中的任一点 x_0，总能取到充分小的 δ，使 $U^\circ(x_0,\delta)$（端点是半邻域）不包含这有限个点。例如，记 $r_0=0, r_{k+1}=1$，取

$$\delta=\begin{cases}\min\limits_{1\le i\le k+1}\{|x_0-r_i|\}, x_0\ne r_0,r_2,\cdots,r_{k+1}\\ \min\limits_{\substack{1\le i\le k+1\\ i\ne i_0}}\{|x_0-r_i|\}, x_0=r_{i_0}\end{cases}$$

这样 $x\in U^\circ(x_0,\delta)$ 时，有 $|R(x)-0|=R(x)<\varepsilon$.

§2　函数极限的性质

定理 1（唯一性）　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则此极限是唯一的.

定理 2（局部有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内有界.

定理 3（局部保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则对任何正数 $r<A$，存在某 $U^{\circ}(x_0)$，使得对一切 $x\in U^{\circ}(x_0)$，有

$$f(x)>r>0$$

【注】 在以后应用局部保号性时，常取 $r=\dfrac{A}{2}$.

定理 4（保不等式性）　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与都 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $U^{\circ}(x_0,\delta')$ 上有 $f(x)\le g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

定理 5（迫敛性）　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在某 $U^{\circ}(x_0,\delta')$ 上有

$$f(x)\le h(x)\le g(x)$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

定理 6（四则运算法则） 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则函数 $f\pm g, f\cdot g$ 当 $x\to x_0$ 时极限也存在，且

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

2） $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ne 0$，则 f/g 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且有

3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

例 1　$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

当 $x+1\neq 0$ 时有

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x^3+1}=\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

故所求的极限等于

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}=-1$$

例 3　$\lim\limits_{x\to x_0}\tan x=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}=\tan x_0\ (\cos x_0\neq 0)$

例 4[教材例 1] 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$。

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$$

当 $x>0$ 时，有 $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，故由迫敛性得：$\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$

当 $x<0$ 时，有 $1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$，故由迫敛性得：$\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$

综上，$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。

例 5［教材例 4，习题 3.2：6］　证明　$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1(a>0,a\neq 1)$。

当 $a>1$ 时，对任给的 $\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$)，为使

$$\left|a^x-1\right|<\varepsilon$$

即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$，利用对数函数 $\log_a x$（当 $a>1$ 时）的严格递增性，只要

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$$

于是，令

$$\delta=\min\{\log_a(1+\varepsilon),-\log_a(1-\varepsilon)\},$$

则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|a^x-1\right|<\varepsilon$ 成立，从而证得结论.

当$0<a<1$时，令$b=\dfrac{1}{a}>1$，则

$$\lim_{x\to 0}a^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x}=1$$

例 6［习题 3.2：5］　设$f(x)>0,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。证明：

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$$

其中$n\geq 2$为正整数。

因为$f(x)>0$，由保不等式性，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\geq 0$。

（1）当$A=0$　时，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)<\varepsilon^n$，即$\sqrt[n]{f(x)}<\varepsilon$，证得$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=0$。

（2）当　$A>0$　时，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。从而

$$\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}+\sqrt[n]{Af^{n-2}(x)}+\cdots+\sqrt[n]{A^{n-1}}}\leq\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[n]{A^{n-1}}}\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt[n]{A^{n-1}}}$$

证得$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$。

定理 7（复合函数极限定理 1）设

（1）$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$（$u_0,A$可无穷）;

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$（$x_0$可无穷）;

（3）在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0,\delta')$上，$g(x)\neq u_0$（当u_0无穷时，此条件不要）;

则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

证　设x_0,u_0都是有限数，A也是有限数（其它情况作为习题，极限为地穷时，见后面内容）。

由（1），$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当$0<|u-u_0|<\delta_1$时，有

$$|f(u)-A|<\varepsilon$$

由（2），对上面δ_1，$\exists\delta(0<\delta<\delta')$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有（结合条件(3)）

$$0<\left|g(x)-u_0\right|<\delta_1$$

于是

$$\left|f[g(x)]-A\right|<\varepsilon$$

这就证得 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=A$。

【注 1】 对该定理的理解：由于 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ 是存在的，则 u 以任何方式趋于 u_0（但不等于 u_0），极限都存在且等于 A。当 u 取特殊的方式：$u=g(x)\to u_0(x\to x_0)$ 时（$g(x)\neq u_0$），极限也存在且等于 A。

【注 2】【变量替换法】在解题时，为了方便，常采用如下变量替换法：

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] \ \underset{u\to u_0(x\to x_0)}{\overset{u=g(x)}{=\!=\!=\!=}}\ \lim_{u\to u_0} f(u)$$

值得注意的是，我们令 $u=g(x)$，这里 u 是 x 的一个函数，$u\to u_0(x\to x_0)$ 可能是某种特殊的方式。而右面的 $\lim\limits_{u\to a} f(u)$ 中的 u 是独立的自变量，是以任何方式趋于 u_0，这里的 u 可换成任何一个字母。前后两个 u 本质不同。为了方便，我们通常使用同一个字母。

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\sin x^2 \ \underset{u\to 0(x\to 0)}{\overset{u=x^2}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{u\to 0}\sin u=0$

【注 3】定理中的条件（3）是必要的。如果没有它，可能导致错误。

例如：

$$g(x)=x\sin\frac{1}{x}，\quad f(u)=\begin{cases}0,u\neq 0\\ 1,u=0\end{cases}$$

显然

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0，\quad \lim_{u\to 0} f(u)=0$$

但 $\lim\limits_{x\to 0} f[g(x)]$ 不存在。这是因为：对任意小邻域 $U^{\circ}(0,\delta)$，$g(x)$ 都有无穷多值 $=0$，又有无穷多个值 $\neq 0$，因此，$f[g(x)]$ 都有无穷多值 $=0$，又有无穷多个值 $=1$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f[g(x)]$ 不存在。

【注 4】定理中的条件只是充分的。例如：

$$g(x)\equiv 0,\quad f(u)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{u},u\neq 0\\ 1,u=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=0,\quad \lim_{u\to 0}f(u)\text{不存在,}$$

但 $f[g(x)]\equiv 1$，极限存在。

例 7　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\xlongequal[x=y^2-1]{y=\sqrt{1+x}}\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{y^2-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{2}$。

定理 8（复合函数极限定理 2）［参见第四章复合函数的连续性］　设

（1）$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$；

则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f(u_0)$$

这个定理的证明与上一个定理的证明完全类似。只要注意到，由（1），$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1$，当 $|u-u_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$，不需要 $0<|u-u_0|$。

【注】（在第四章中，如果 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则称为 f 在点 u_0 连续，此时，极限运算与复合运算可交换。

例 8　$\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)=\sin(\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2))=\sin 0=0$。

例 9　$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\sin x}{x})}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}$。

§3　函数极限存在的条件

定理 1（归结原则）　$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A \Leftrightarrow$ 对任何 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A$.

[必要性]　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，使得当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有 $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

另一方面，设数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，则对上述的 $\delta>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>\mathrm{N}$ 时有 $0<\left|x_n-x_0\right|<\delta$，从而有 $\left|f\left(x_n\right)-A\right|<\varepsilon$.　这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A$.

[充分性]　设对任何数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A$，则可用反证法推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$.

事实上，倘若当 $x\to x_0$ 时 f 不以 A 为极限，则存在某 $\varepsilon_0>0$，对任何 $\delta>0$ (不论多么小)，总存在一点 x，尽管 $0<|x-x_0|<\delta$，但有 $|f(x)-A|\geq\varepsilon_0$.

现依次取 $\delta=\delta',\dfrac{\delta'}{2},\dfrac{\delta'}{3},\cdots,\dfrac{\delta'}{n},\cdots$，则存在相应的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，使得

$$0<|x_n-x_0|<\frac{\delta'}{n} \text{而} |f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0, n=1,2,\cdots$$

显然数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，但当 $n\to\infty$ 时 $f(x_n)$ 不趋于 A . 这与假设相矛盾。

【注 1】　若可找到一个以 x_0 为极限的 $\{x_n\}$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在,或找到两个都以 x_0 为极限的数列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ 都存在而不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

【注 2】　［习题 3.3：4］　设 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 内有定义。证明：若对任何数列 $\left\{x_n\right\}\subset U^0(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在，则所有这些极限都相等。

证：设任意的两个数列 $\left\{x_n\right\},\left\{y_n\right\}\subset U^0(x_0)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x_0,$。构造数列：$\left\{z_n\right\}: x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=x_0$，由题设，$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 存在。

从而 $\left\{f(x_n)\right\},\left\{f(y_n)\right\}$ 作为 $\left\{f(z_n)\right\}$ 的两个子列, 其极限都与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 相等。

因此，上面归结原则又可改为：

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\text{存在}\Leftrightarrow\text{对任何}x_n\to x_0(n\to\infty)，\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)\text{都存在}.$$

例 1（教材例 1）　证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

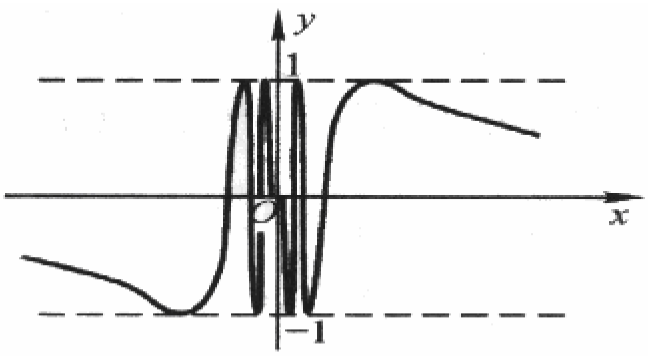
证　取

$$x_n'=\frac{1}{n\pi},x_n''=\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots),$$

显然$x_n'\to 0,x_n''\to 0(n\to\infty)$，但

$$\sin\frac{1}{x_n'}=0\to 0,\sin\frac{1}{x_n''}=1\to 1(n\to\infty).$$

故由归结原则知极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.



定理 2（**归结原则加强版，即习题 3.3：8**）　设函数f在点x_0的某空心右邻域$U_+^\circ(x_0)$有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$的充要条件是：对任何以$x_0$为极限的递减数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0)$，有

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

证　必要性。同归结原则，易证，略。

充分性。(用反证法）设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0)=(x_0,x_0+\delta_0)$有定义。假设$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，

则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x':0<x'-x_0<\delta_0$，使

$$\left|f(x')-A\right|\geq\varepsilon_0.$$

取$\delta_1=\dfrac{\delta_0}{2}$，$\exists x_1:0<x_1-x_0<\delta_1$，使

$$\left|f(x_1)-A\right|\geq\varepsilon_0$$

取$\delta_2=\min\left\{x_1-x_0,\dfrac{\delta_1}{2}\right\}$，$\exists x_2:0<x_2-x_0<\delta_2$（此时$x_0<x_2<x_1$），使

$$\left|f(x_2)-A\right|\geq\varepsilon_0$$

如此继续下去，取$\delta_n=\min\left\{x_{n-1}-x_0,\dfrac{\delta_{n-1}}{2}\right\}$，$\exists x_n$：$0<x_n-x_0<\delta_n$（此时$x_0<x_n<x_{n-1}$），使

$$\left|f(x_n)-A\right|\geq\varepsilon_0$$

这样就得到一个数列$\{x_n\}$满足：$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0,\delta_0)$，满足$x_{n+1}<x_n$（严格递减），且$0<x_n-x_0<\delta_n\leq\dfrac{\delta_0}{2^n}$，而$\left|f(x_n)-A\right|\geq\varepsilon_0$。显然$x_n\to x_0(n\to\infty)$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$。与题设矛盾。

定理 3（**单调有界定理**）设f为定义在$U_+^\circ(x_0)$上的单调有界函数，则右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在.

证　不妨设f在$U_+^\circ(x_0)$上递增. 因f在$U_+^\circ(x_0)$上有界，由确界原理，$\inf\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)}f(x)$存在，记为$A$. 下证$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

事实上，任给$\varepsilon>0$，按下确界定义，存在$x'\in U_+^\circ(x_0)$，使得$f(x')<A+\varepsilon$. 取$\delta=x'-x_0>0$，则由f的递增性，对一切$x\in(x_0,x')=U_+^\circ(x_0;\delta)$，有

$$f(x)\leq f(x')<A+\varepsilon$$

另一方面，由$A\leq f(x)$，更有$A-\varepsilon<f(x)$. 从而对一切$x\in U_+^\circ(x_0;\delta)$有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

这就证得$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 2　[习题 3.3：5]设f为$U^0(x_0)$上的递增函数。证明：$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在，且有

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U^o{}_-(x_0)}f(x),\ f(x_0+0)=\inf_{x\in U^o{}_+(x_0)}f(x)$$

证　f在$U_-^0(x_0)$递增且有上界$f(\overline{x})$（这里任取$\overline{x}\in U_+^0(x_0)$）。由单调有界定理得

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U^o_-(x_0)} f(x)$$

同理 $f(x_0+0)=\inf_{x\in U^o_+(x_0)} f(x)$

【注】 此题说明单调函数只有第一类间断点。（见习题 4.1：6）

定理 4（柯西准则 P56） 设函数 f 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta(<\delta')$,使得对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0;\delta)$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证　必要性　设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，则对任给的 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta(<\delta')$,使得对任何 $x\in U^\circ(x_0;\delta)$ 有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.于是对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0;\delta)$ 有

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性　设数列 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta)$ 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$.

按假设，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0;\delta)$，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

由于 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，对上述的 $\delta>0$，存在 $N>0$，使得当 $n,m>N$ 时有 $x_n,x_m\in U^\circ(x_0;\delta)$，从而有

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$$

于是，按数列的柯西收敛准则，数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限存在，由归结原则推得 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在。

【注】 否定形式

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的充要条件：存在 $\varepsilon_0>0$，对任何 $\delta>0$ (无论 δ 多么小)，总可找到 x'， $x''\in U^0(x_0;\delta)$, 使得 $|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$.

例 3 证明极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

取 $\varepsilon_0=1$, 对任何 $\delta>0$, 取正整数 $n>\frac{1}{\delta}$, 令

$$x'=\frac{1}{n\pi},x''=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}},$$

则有 $x',x''\in U^\circ(0;\delta)$，而

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|=1=\varepsilon_0$$

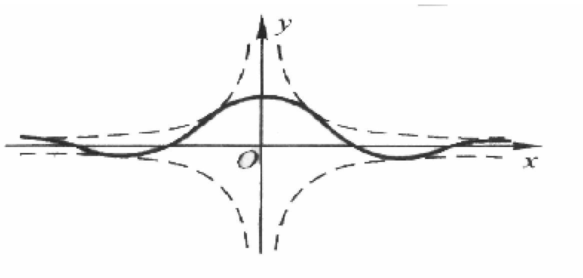
于是按柯西准则，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

例 4　［习题 3.3：6］设 $D(x)$ 为狄利克雷函数，$x_0\in R$。证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在。

证　用柯西准则证明。取 $\varepsilon_0=1$，$\forall\delta>0$，由有理数及实数的稠密性，在 $U^0(x_0,\delta)$ 中既有有理数，也有无理数，从中取有理数 $x'\in U^0(x_0,\delta)$，取无理数 $x''\in U^0(x_0,\delta)$，于是 $\left|D(x')-D(x'')\right|=1\geq\varepsilon_0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在。

§4　两个重要的极限

【一】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



证　在不等式

$$\sin x<x<\tan x(0<x<\frac{\pi}{2}).$$

除以$\sin x$,得到$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$,由此得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

在上式中用$-x$代替x时,上式不变,故上式当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$时也成立,从而它对一切不满足不等式$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$的x都成立..由$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$及函数极限的迫敛性,即得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$的图象如图所示.

例 1（教材例 2）　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1$

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=1$

例 2　求　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}$

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1$

例 3　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$

例 4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}\overset{t=\arctan x}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\tan t}=1$

【注】暂且承认 $x\to0$ 时，$\arctan x\to0$

例 5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{t=\arcsin x}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

【注】暂且承认 $x\to0$ 时，$\arcsin x\to0$

【二】 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，$\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

证 首先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

不妨设 $x\ge1$，由 $[x]\le x<[x]+1$ 和指数函数的单调性得

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$ 易得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=e$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时，有

$$e-\varepsilon<(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}<e+\varepsilon$$

取 $G=N+1$，当 $x>G$ 时，就有 $[x]>N$，于是

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<e+\varepsilon$$

由定义证得

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

其次证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$。令 $x=-y$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1})\right]=e$$

综上，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$。

例 6　[教材例 3]求 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]=e^{2}\ .$$

例 7　[教材例 4] 求 $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

令 $u=-x$, 则当 $x\to0$ 时 $u\to0$.因此

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(1+u)^{-\frac{1}{u}}=\frac{1}{e}.$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to0}\cos x^{\frac{1}{1-\cos x}}$

$$\lim_{x\to0}\cos x^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-1}$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=ee^{-1}=1$$

例 10 [教材例 5] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})^{n}$.

$$(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})^{n}<(1+\frac{1}{n})^{n}\to e(n\to\infty).$$

另一方面,当 $n>1$ 时有

$$(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})^{n}=(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-2},$$

而由归结原则(取 $x_n = \dfrac{n^2}{n-1}, n = 2,3,\cdots$).

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-2} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}} \quad = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e$$

于是，由数列极限的迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})^{n} = e$$

§5　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量的概念

定义 1　设 f 在某 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 f 为当 $x\to x_0{}^{+}$ 时的**无穷小量**. 记为 $f(x)=o(1)\ (x\to x_0)$。

定义 2 若函数 f 在某 $U^{\circ}(x_0)$ 内有界，则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的**有界量**. 记为 $f(x)=O(1)\ (x\to x_0)$。

类似可定义当 $x\to x_0{}^{+}, x\to x_0{}^{-}, x\to+\infty, x\to-\infty$ 以及 $x\to\infty$ 时的无穷小量与有界量.

例如：

$x^2=o(1)(x\to 0), \sin x=o(1)(x\to 0), 1-\cos(x)=o(1)(x\to 0)$，

$\sqrt{1-x}=o(1)(x\to 1^{-}), \dfrac{1}{x^2}=o(1)(x\to\infty), \dfrac{\sin x}{x}=o(1)(x\to\infty)$，

$\sin\dfrac{1}{x}=O(1)(x\to 0)$

【思考】 f 为当 $x\to x_0$ 时的无界量?

性质

1．两个(相同类型的)无穷小量之和、差、积仍为无穷小量.

2．无穷小量与有界量的乘积为无穷小量.

例如，当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量，

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A=o(1)\ (x\to x_0)$.

二、无穷小量阶的比较

设当 $x\to x_0$ 时，f 与 g 均为无穷小量.

【1】若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量,或称 g 为 f 的低阶无

穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))\quad(x\to x_0)$.

例如 $x^2=o(x)\ (x\to 0)$，$1-\cos x=o(\sin x)\ (x\to 0)$. 这是因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2}=0$$

【2】若存在正数 L，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le L\Leftrightarrow|f(x)|\le L|g(x)|\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=O(1)(x\to x_0)$$

则记作

$$f(x)=O(g(x))\,(x\to x_0)$$

例如：$x\sin\frac{1}{x}=O(x)(x\to 0)$

【3】 若存在正数 K,L，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$0<K\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le L$$

则称 f 与 g 为当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.

例如：$f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), g(x)=x$ 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小量,

$$1\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|\le 3$$

【4】$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0$ 时， f 与 g 必为同阶无穷小量.

证明是容易的。例如，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 皆为无穷小量. 又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，

所以 $1-\cos x$ 与 x^2 为同阶无穷小量.

【5】 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 f 与 g 时当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量.记作

$$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)。$$

例如：当 $x\to 0$ 时，[有些以后证明]

（1）$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$，

（2）$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

（3）$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

【注】应指出，并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较．例如，当$x \to 0$时，$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$和$g(x) = x^2$都是无穷小量，但它们的比

$$\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \text{ 或 } \frac{x^2}{x\sin\frac{1}{x}} = \frac{x}{\sin\frac{1}{x}}$$

当$x \to 0$时都不是有界量，所以这两个无穷小量不能进行阶的比较.这是因为

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0，\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$$

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{n^2}} \to 0，\ \frac{g(x_n)}{f(x_n)} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin\frac{1}{n^2}}(2n\pi + \frac{1}{n^2}) \to +\infty$$

三、应用：等价无穷小替换法

设函数f, g, h在$U^\circ(x_0)$内有定义，且有

$$f(x) \sim g(x)\ (x \to x_0).$$

(i) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x) = A$；

(ii) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)} = B$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)} = B$。

证　(i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = 1\cdot A = A$.

(ii)可类似地证明.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 4x}$。

解　由于$\arctan x \sim x (x \to 0)$，$\sin 4x \sim 4x (x \to 0)$．故由定理 3．12 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

解　由于 $\tan x-\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$，而

$$\sin x\sim x(x\to 0),1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}(x\to 0),\sin x^3\sim x^3(x\to 0),$$

故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

【注】错误的做法

$$\tan x\sim x(x\to 0),\sin x\sim x(x\to 0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{\sin x^3}=0.$$

四、无穷大量

定义 3　设函数 f 在某 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义．若对任给的 $G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^0(x_0;\delta)$ $(\subset U^0(x_0))$ 时有

$$|f(x)|>G$$

则称函数 f 当 $x\to x_0$ 时有**非正常极限** ∞，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

定义 4　对于自变量 x 的某种趋向，所有以 $\infty,+\infty$ 或 $-\infty$ 为非正常极限的函数，都称为**无穷大量**.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

证　任给 $G>0$，要使 $\dfrac{1}{x^2}>G$，只要 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{G}}$，因令 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{G}}$ 则对一切 $x\in U^0(0;\delta)$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

例 4　证明：当 $a>1$ 时，　$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

证　任给 $G>0$（妨设 $G>1$），要使 $a^x>G$，由对数函数的严格增性，只要 $x>\log_a G$，

因此令 $\mathrm{M}=\log_a G$，则对一切 $x>\mathrm{M}$ 有 $a^x>G$．这就证得 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$．

顺便指出，容易证明：

当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$；

当 $0<a<1$ 时有 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0, \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$．

【注】 若 f 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则易见 f 为 $U^0(x_0)$ 上的无界函数．但无界函数却不一定是无穷大量．如 $f(x)=x\sin x$ 在 $U(+\infty)$ 上无界，因对任给的 $G>0$ 取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 这里正整数 $n>\dfrac{G}{2\pi}$，则有

$$f(x)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}>G$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq\infty$，因若取数列 $x_n=2n\pi(n=1,2,\ldots)$ 则 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n)=0$．

定理 1 （i）设 f 在 $U^0(x_0)$ 内有定义且不等于 0.若 f 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，则 $\dfrac{1}{f}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.（ii）若 g 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $\dfrac{1}{g}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

根据这个定理，对无穷大量的研究可归结为对无穷小量的讨论.

五、常用的三个无穷大量的比较

$$(\ln x)^{\beta}\ll x^{\alpha}\ll a^{x}(x\to+\infty)$$

这里 $\beta>0,\alpha>0,a>1$。

六、曲线的渐近线

此略，放在第六章第 6 节：图像的讨论中讲。