第七讲

函数的特性

单调函数

定义1

设 f 是定义在 D 上的函数.

若 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

(i) 有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的增函数;

特别有 $f(x_1) < f(x_2)$ 时, 称 f 为严格增函数.

(ii) 有 $f(x_1) \ge f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的减函数;

特别有 $f(x_1) > f(x_2)$ 时, 称 f 为严格减函数.

不难知道, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正值严格增的, 则 $f(x)g(x)$ 也是正值严格增的.

例1 任意 $n\in\mathbf{N}_+$, $y_{2n-1}=x^{2n-1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增;

$y_{2n}=x^{2n}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增,在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减.

证 由$y_1=x$在$\mathbf{R}_+$上为正值严格增,可知$y_2=y_1y_1$在$\mathbf{R}_+$上亦正值严格增.由归纳法,若已证y_n在$\mathbf{R}_+$上为正值严格增,可知$y_{n+1}=y_1y_n$在$\mathbf{R}_+$上亦正值严格增.

若 $x_1<x_2<0$, 则 $0<-x_2<-x_1$,于是

$$(-x_2)^{2n}<(-x_1)^{2n},\ (-x_2)^{2n-1}<(-x_1)^{2n-1},$$

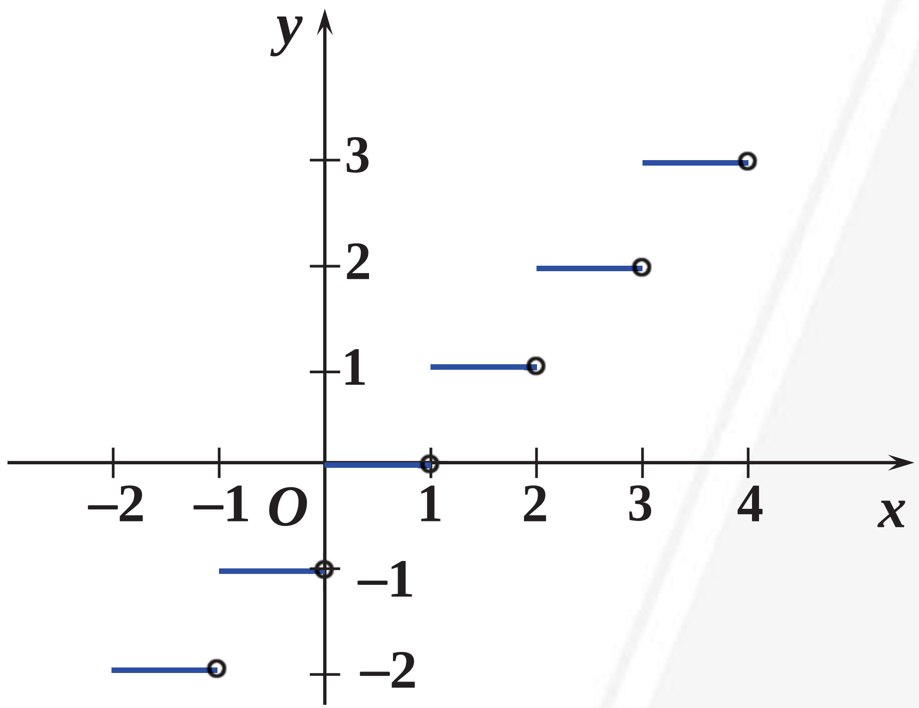
即 $x_2^{2n}<x_1^{2n}$, $x_2^{2n-1}>x_1^{2n-1}$. 这就证明了 y_{2n} 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减, 而 y_{2n-1}在 $\mathbf{R}_-$上严格增.

若 $x_1 \le 0 < x_2$ 或 $x_1 < 0 \le x_2$,则

$$x_1^{2n-1} \le 0 < x_2^{2n-1} \text{ 或 } x_1^{2n-1} < 0 \le x_2^{2n-1},$$

这证明了 y_{2n-1} 在 R 上严格增.

例2 易证函数 $y=[x]$ 在 R 上是增函数, 但非严格增.



定理1.2

设 $y=f(x), x\in D$为严格增函数, 则 f 必有反函数 f^{-1}, 且 f^{-1}在其定义域 $f(D)$上也是严格增函数.

类似地, 严格减函数 f 必有反函数 f^{-1}, 且 f^{-1}在其定义域上也是严格减函数.

证 设 f 在 D 上严格增, 则 $\forall y\in f(D)$ 只有一个 $x\in D$, 使 $f(x)=y$.

事实上, 若 $\exists x_1<x_2$,使 $f(x_1)=y=f(x_2)$, 则与 f 的严格增性质相矛盾.

再证 f^{-1}必是严格增的：

$$\forall\ y_1, y_2 \in f(D),\quad y_1 < y_2,$$

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2),$$

由于 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性，必有 $x_1 < x_2$，即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$，因此 f^{-1}也是严格增函数.

例3 由于 $y_n = x^n$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增，因此 y_n 的反函数 $z_n = x^{1/n}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增，故对任意有理数 $r = \dfrac{n}{m}$，$y = x^r$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上亦为严格增.

例4 证明：$y = a^x$ 当 $a > 1$时，在 R 上严格增；当 $0 < a < 1$时，在R上严格减.

证 设 $a > 1$. $\forall x_1, x_2$, $x_1 < x_2$. 由Q 的稠密性，$\exists r_1, r_2 \in Q$, 使 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$, 因此

$$a^{x_1} = \sup\{a^r \mid r \in Q,\ r < x_1\} \le a^{r_1} < a^{r_2}$$

$$\le \sup\{a^r \mid r \in Q, r < x_2\} = a^{x_2}.$$

类似可证 a^x 当 $0 < a < 1$时，在 R 上严格减.

由于 $y = \log_a x$ 是 $y = a^x$ 的反函数，因此

$y = \log_a x$ 当 $a > 1$时，在 R_+ 上严格增；

$y = \log_a x$ 当 $0 < a < 1$时，在 R_+ 上严格减.

奇函数与偶函数

定义2

设D关于原点对称,即:$\forall x\in D$,必有$-x\in D$.

若$\forall x\in D$, $f(-x)=-f(x)$,称f为D上的奇函数.

若$\forall x\in D$, $f(-x)=f(x)$,称f为D上的偶函数.

显然,若记$G(f)$为f的图像,则$f(x)$是奇函数或偶函数的充要条件是:

$$(x,y)\in G(f)\Leftrightarrow(-x,-y)\in G(f),$$

或
$$(x,y)\in G(f)\Leftrightarrow(-x,y)\in G(f).$$

例如 $y=\sin x,\ y=\tan x,\ y=x^{2n+1}$ 是奇函数,

而 $y=\cos x,\ y=x^{2n}$ 是偶函数.

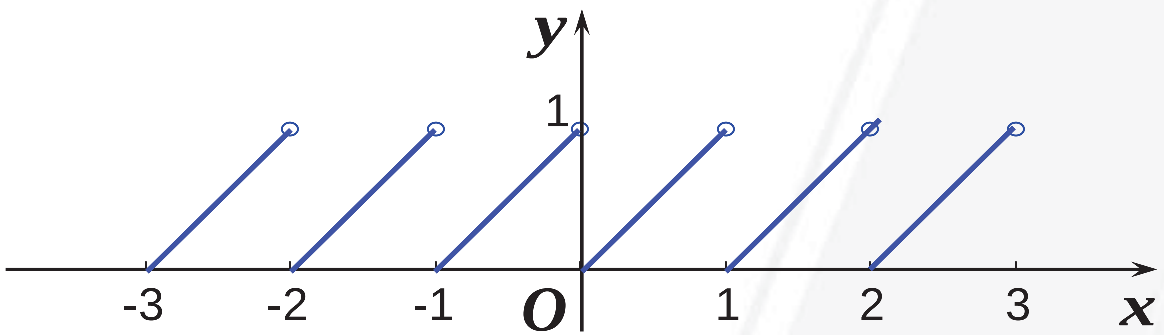
$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数 $y_1=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ 的反函数，从而它也是奇函数.

周期函数

定义3

设 f 为D上定义的函数,若$\exists\sigma>0$, 使$\forall x\in D$ 必有$x\pm\sigma\in D$, 且$f(x\pm\sigma)=f(x)$,
则称 f 为周期函数, σ为 f 的一个周期.
若周期函数f的所有正周期中有一个最小的周期,
则称此最小正周期为 f 的基本周期, 简称周期.

例如函数 $f(x)=x-[x]$的周期为1. 见下图.



例5 $\sin x$ 的周期为 2π, $\tan x$ 的周期为 π,

注1 周期函数的定义域不一定是R. 例如:

$$f(x)=\sqrt{\sin x}.$$

注2 周期函数不一定有最小周期. 例如狄利克雷函数以任意正有理数为周期, 但没有最小周期.

例6 任意正有理数是狄利克雷函数 $D(x)$的周期.

证 设 $r\in \mathbf{Q}_+,\ x\in \mathbf{R}.$

若 $x\in \mathbf{Q}$, 则 $x+r\in \mathbf{Q}$, $D(x+r)=1=D(x)$;

若 $x\notin \mathbf{Q}$, 则 $x+r\notin \mathbf{Q}$, $D(x+r)=0=D(x)$.

因此, r 是 $D(x)$ 的一个周期.