

# 常微分方程建模案例在教学实践中 解决实际问题的探讨与研究

吉莉霞, 刘子辉

(盐城幼儿师范高等专科学校, 江苏 盐城 224000)

[关键词] 数学模型; 常微分方程; 教学;

[摘要] 基于常微分方程数学模型在解决传染病问题、经济调整问题、计算机病毒传播等问题中的应用. 对其在大学教学实践中实际问题进行剖析. 将数学建模思想与常微分方程教学相结合, 有利于提高促进学生解决实际问题的综合能力, 激发学生的学习兴趣.

[中图分类号] O175.12 [文献标识码] A [文章编号] 1009-9506 (2023) 03-0012-06

常微分方程在大学数学类专业中属于基础性课程, 也是数学分析、高等代数的后继课程<sup>[1]</sup>. 在学习常微分方程时, 学生很难将其应用在实际生活中, 从而使得学生的学习兴趣 and 积极性不高. 在这种背景下, 须加强学生的数学建模能力, 这样需将常微分方程教学和数学建模思想进行结合, 使学生通过计算机提高解决实际问题的能力<sup>[2]</sup>. 常微分方程是研究自然科学、社会科学的基本数学理论和方法, 在航空航天、物理化学、金融经济等领域有广泛应用, 许多现象都能用微分方程对其规律或原理进行描述<sup>[3-5]</sup>, 例如牛顿万有引力定律、运动定律、能量守恒定律、机械能守恒定律、生态种群竞争、人口发展规律等<sup>[6]</sup>. 常微分方程与数学模型、高等代数等课程都有密切的相关性<sup>[7]</sup>, 是大学数学教学当中重要组成部分, 常微分方程理论体系严谨, 其抽象程度比较高, 在讲授时要与实际应用背景相结合, 才能更好地实现人才培养目标.

在教学中, 选取基础知识进行教学, 结合范例内容举一反三, 可以帮助学生掌握知识规律. 在实际应用中, 借助常微分方程范例教学解释现实中的现象, 并预测未来的发展趋势, 对生产实践、社会生活具有指导意义.

综上所述, 本文基于常微分方程数学模型, 对其在大学数学教学实际问题进行了研究.

## 1 常微分方程解决实际问题的建模案例

### 1.1 传染病模型

传染病在人类历史上始终威胁人类的健康, 尽管科技不断发展, 在一定程度上控制了肆虐全球传染

[作者简介] 吉莉霞, 硕士, 讲师, 研究方向: 数学教育.

刘子辉, 副教授, 研究方向: 数学教育等.

病, 然而环境也随着科技的发展而不断恶化, 出现一些变异的、新型的传染病毒. 传染病的类型差异, 会表现出不同的传播过程, 对于常微分方程课程教学时, 基于一般传播激励构建传染病微分方程模型, 转换为数学问题得以解决.

假设 I: 保持总人数不变, 用  $N$  表示, 构建 SIR 模型, 即用病人、健康者、病愈具有免疫力移出者划分不同的人群,  $t$  表示时间, 分别用  $I(t)$ 、 $S(t)$ 、 $R(t)$  标记三类人的比例;

假设 II: 日治愈率用  $\mu$  表示, 病人日接触率用  $\beta$  表示, 传染期平均接触数用  $\sigma = \beta\mu^{-1}$  表示.

根据假设 I, 有  $S(t)+I(t)+r(t)=1$ ; 根据假设 II, 分析移出者、病人改变量, 则有

$$\begin{cases} N(dI/dt) = \beta NSI - \mu NI \\ N(dR/dt) = \mu NI \end{cases},$$

其中  $dI/dt$  表示  $t$  时刻的病人的微分方程,  $dR/dt$  表示  $t$  时刻的病愈者的微分方程, 结合初始条件则有公式 (1):

$$\begin{cases} dS/dt = -\beta SI, S(0) = S_0 > 0 \\ dI/dt = \beta SI - \mu I, I(0) = I_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

公式 (1) 的模型为 Mc Kendrick、Kermack 的 SIR 模型, 帮助学生用常微分方程转化实际问题, 充分发挥一元微分学知识的作用. 通过数学软件 Mathematica、Matlab 等进行数值计算、图示、推理, 从而将课堂教学效果提高. 通过给学生布置一些相关作业, 让其通过数学软件、计算机对微分方程进行求解, 并对解的实际意义进行分析. 例如对于公式 (1), 利用微积分知识无法将  $S(t)$ 、 $I(t)$  的解析解求出. 但可通过 Matlab 将相轨线、数值解画出, 图 1 为 SIR 模型的相轨线, 图 2 为 SIR 模型数值解.

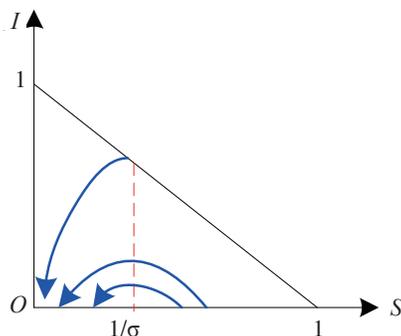


图 1 SIR 模型的相轨线图

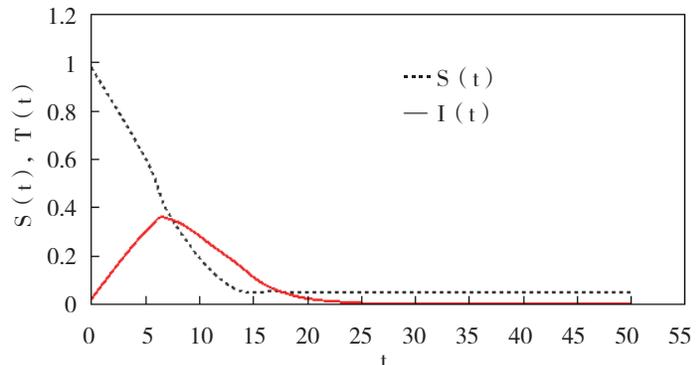


图 2 SIR 模型的数值解

通过图形可视化, 可将数学问题翻译成实际问题, 由图 2 知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ , 即全部病人最终会治愈;  $s_0 > \sigma^{-1}$  时,  $I(t)$  先单调递增, 再单调递减为零; 若  $s_0 \leq \sigma^{-1}$ ,  $I(t)$  则单调递减为零. 所以将会出现阈值,  $\sigma^{-1}$  为一个阈值. 由  $\sigma^{-1}$  意义知, 将卫生医疗水平提高, 可使传染病蔓延得到延缓.

## 1.2 经济调整问题

在数学专业中, 高校普遍将金融数学作为重要培养方向. 所以, 数学建模与金融和经济之间的关联是非常紧密的, 且受到社会各界的广泛关注. 在研究经济调整问题模型的过程中, 要深入讨论经济稳定条件与消费、产值、诱发投资的关联. 由于假设投资函数为线性增长函数, 因此一般会将会将线性微分方程模型作为经济调整微分方程模型. 但由于实际资源的限制, 需修正原有模型, 模型修正后为非线性微分方程, 此时要基于微分方程稳定性讨论经济稳定条件, 模拟修正微分方程的数值<sup>[8]</sup>. 从模型建立、模型修正到理论分析, 再进行数值仿真与模拟<sup>[9]</sup>, 激发并培养学生的数学建模思想. 对于三部门经济体模型的建立过程中, 产值构成为投资、消费、政府购买总和, 设定消费为  $C(t)$ , 实际发生产值为  $x_1(t)$ ,

诱发投资为  $I(t)$ ，政府购买用  $A$  表示，通常情况下，政府购买比较稳定，具体见公式 (2)：

$$x_1(t) = C(t) + I(t) + A \quad (2)$$

公式中， $C(t) = cx_1(t) = (1-s)x_1(t)$ ， $s$ 、 $c$  分别代表边际储蓄倾向、边际消费倾向，且有  $1-c=s$ ，经济调整一般微分方程模型可以表示为公式 (3) 所示：

$$\begin{cases} dI/dt = -k[I - v(dx_1/dt)] \\ dx_1/dt = -\lambda(sx_1 - I - A) \end{cases} \quad (3)$$

公式中，投资系数用  $v$  表示； $k$ 、 $\lambda$  为常数，均大于零。用实际产值增长的线性函数来表示计划诱发投资函数，即计划诱发投资将随着实际产值的增加而增加，这属于线性系统，借助常微分方程知识，可让学生求出产值  $x_1(t)$ ，进一步深入的讨论相关经济学意义。但由于实际资源的限制，此时可启发学生修正模型 (3)，假设计划诱发投资项为饱和非线性函数，见公式 (4) 所示：

$$v(dx_1/dt)[a + (dx_1/dt)]^{-1} \quad (4)$$

其中： $a$  为正常数。这时对应的模型变成非线性模型：

$$\begin{cases} dI/dt = -k[1 - v(dx_1/dt)(a + (dx_1/dt))^{-1}] \\ dx_1/dt = -\lambda(sx_1 - I - A) \end{cases} \quad (5)$$

采用初等积分法不能直接将解式求出，可引导学生使用稳定性工具、微分方程进行定性分析，通过这个经济学案例，会提高学生学习这部分理论的积极性。对公式 (5) 中的第二个方程两边进行求导，并将第一个方程代入，得到公式 (6)：

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k + \lambda s)\frac{dx_1}{dt} - k\lambda v\frac{dx_1}{dt}\left(a + \frac{dx_1}{dt}\right)^{-1} + k\lambda sx_1 = k\lambda A \quad (6)$$

公式 (6) 是二阶常系数非线性常微分方程，基于常微分方程的可转化性，能够将其转化为一阶微分方程组，详见公式 (7) 所示：

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 = F(x_1, x_2) \\ dx_2/dt = -(k + \lambda s)x_2 + k\lambda vx_2/(a + x_2) - k\lambda vx_1 + k\lambda A = Q(x_1, x_2) \end{cases} \quad (7)$$

在求解方程组 (7) 时不适用特征值方法，引导学生在分析平衡点性态时充分融合微分方程定性和稳定性，求出平衡点  $E(A/s, 0)$  为系统 (7) 的唯一解，在  $E(A/s, 0)$  处得到一阶近似系统如下：

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 \\ dx_2/dt = -(k + \lambda s)x_2 + (k\lambda vx_2/a - k - \lambda s)x_1 \end{cases} \quad (8)$$

将系统 (8) 的对应特征方程的特征根求出，如下所示：

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \sigma = k + \lambda s - \frac{k\lambda v}{a}, \quad \Delta = k\lambda s \quad (9)$$

根据常微分方程定性理论，在  $\sigma = k + \lambda s - (k\lambda v/a) \geq 0$  时，平衡点  $E(A/s, 0)$  稳定，因而，当  $\sigma^2 - 4\Delta < 0$ ， $\sigma > 0$  时，稳定焦点为  $E(A/s, 0)$ ；当  $\sigma^2 - 4\Delta \geq 0$ ， $\sigma > 0$  时，稳定结点为  $E(A/s, 0)$ ；当  $\sigma = 0$  时， $\sigma^2 - 4\Delta = -4\Delta < 0$ ，稳定中心为  $E(A/s, 0)$ 。

在  $\lambda \geq 0$  时，需通过政策鼓励将市场边际储蓄倾向  $s$  提高，或将控制投资系数  $v$ 、边际消费倾向  $c$  减小，这样可确保市场稳定。通过进行经济调整微分方程模型理论分析，引导学生运用数学软件模拟进行数值仿真，激发学生的综合能力，如  $A=1$ ， $k=1/3$ ， $a=2$ ， $s=1/3$ ， $\lambda = 1/2$ ， $v=1/4$ ，此时稳定结点为图 3

所示的  $E(3, 0)$ ;  $A = 1, k = 1/3, \lambda = 1/2, a = 1/3, v = 1/3, s = 1/3$ , 此时稳定焦点为图 4 所示的  $E(3, 0)$ ;  $A = 1, k = 1/3, \lambda = 1, a = 1, v = 2, s = 1/3$ , 此时稳定中心为图 5 所示的  $E(3, 0)$ .

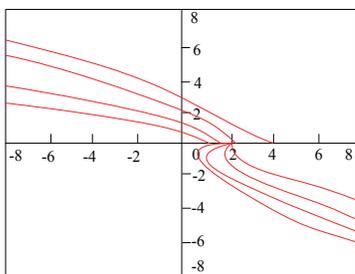


图 3 稳定结点数值模拟结果

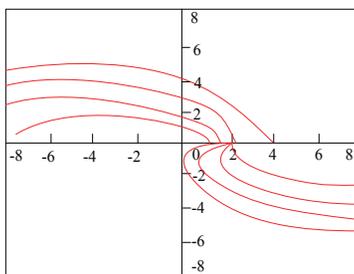


图 4 稳定焦点数值模拟结果

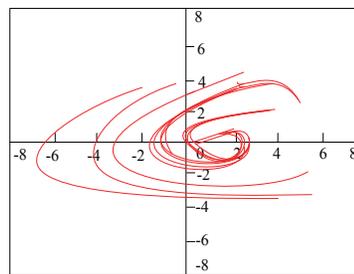


图 5 稳定中心数值模拟结果

### 1.3 废物处理中碰撞问题

在教学中, 常微分方程渗透数学建模可通过运用常微分方程基本理论、基本概念、基本方法等体现出来, 并用现象解释理论. 在进行一些常见微分模型的建构时, 可对这些微分模型物理实际进行挖掘<sup>[10]</sup>, 引导学生进行有关微分模型的建构. 在教学中, 应结合当今时代发展, 选择一些激发学生学习兴趣的新颖案例, 例如在讲授一阶微分方程应用时, 可通过放射性废物处理问题进行分析, 美国在进行浓缩放射性废物的处理时, 将废物装入密封圆桶, 然后放入 300 ft 深海里, 圆桶虽然非常坚固, 但在碰撞海底时可能有破裂发生. 圆桶能承受的速度碰撞是问题核心, 通过破坏性实验, 工程师发现圆桶会在冲撞为 40 ft/s 的条件下破裂, 随后计算圆桶沉入 300 ft 的海底时的末速度. 圆桶装满 55 加仑放射性废物后, 其重量达到  $W = 538.45$  磅, 此时其在海水中会受到  $B = 478.33$  磅浮力. 海水阻力会在圆桶下沉时发挥作用, 大小为  $D = Cv$ ,  $C$  为常数. 相关实验表明  $C = 0.08$ . 假设垂直向下坐标, 以海平面为坐标原点 ( $y = 0$ ), 可得微分方程  $m(d^2y/dt^2) = W - B - D$ , 其中  $m = W/g$ ,  $D = Cv$ ,  $dy/dt = v$ , 可将上式改写为公式 (10):

$$(dv/dt) + (Cg/W)v = (g/W)(W - B) \quad (10)$$

公式 (10) 为一阶线性方程, 满足初值条件  $v(0)=0$ , 其解如下:

$$v(t) = \frac{W - B}{C} (1 - e^{-(Cg/W)t}) \quad (11)$$

计算得到圆桶极限速度如下:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = (W - B)/C \approx 724.74 \text{ (ft/s)}$$

该速度远大于 40 ft/s, 在进行海底和圆桶碰撞速度  $v(t)$  时, 须将圆桶下沉时间  $t$  求出, 但这一点很难做到. 因此, 下沉深度  $y$  的函数用速度  $v$  表示, 即  $v(t) = v(y(t))$ . 按照复合函数求得  $dv/dt = (dv/dy) \cdot (dy/dt)$ , 将  $y$  满足的二阶常微分方程转变为  $m(dv/dy) \cdot (dy/dt) = W - B - Cv$  或  $(v/(W - B - Cv))(dv/dy) = g/W$ , 且  $v(0) = 0, y(0) = 0$ , 对两边积分获得公式 (12):

$$-\frac{v}{C} - \frac{W - B}{C^2} \ln \frac{W - B - Cv}{W - B} = \frac{gy}{W} \quad (12)$$

通过数值方法可将  $v(300)$  的近似值求出, 计算表明,  $v(300) \approx 43.2 \text{ ft/s} > 40 \text{ ft/s}$ , 因此, 在海中丢弃放射性废料不安全. 目前, 美国已改变放射性废料处理方法, 禁止在海中抛入放射性废料. 在常微分方程课程教学中, 融入数学建模思想可达到事半功倍效果.

## 1.4 计算机病毒传播

计算机病毒成为当今互联网领域巨大安全信息隐患, 世界各国都非常重视计算机病毒传播的相关问题, 由于会有很多因素对其产生影响、制约, 在建立计算机病毒传播数学模型的过程中, 需要借助构建微分方程, 并进一步分析其传播规律. 计算机病毒传播特点类似于生物学中传染病传播过程. 计算机病毒传播规模、速度非常惊人, 在分析计算机病毒传播问题时, 在网络中假设只有一种病毒传播, 若系统文件已感染, 则其具有免疫力, 也就是不会再次被感染; 基于上述内容划分网络系统程序: 第一类, 用  $S(t)$  表示并未感染病毒可执行程度, 但怀疑计算机感染病毒的数目; 第二类, 用  $I(t)$  表示病毒已经感染计算机的数目; 第三类, 用  $R(t)$  表示病毒对计算机进行感染后, 计算机通过杀毒软件程度能偶不再被感染的数目. 假设可执行程序总数在计算机病毒传播期间时稳定的, 且为常数  $N$ , 也就是  $S(t) + I(t) = N$ , 设定计算机病毒传染率为  $\alpha$ , 恢复率为  $\beta$ , 从而可得到如下微分方程组:

$$\begin{cases} dS/dt = -\alpha SI \\ dI/dt = -\alpha SI - \beta I \\ dR/dt = \beta I \end{cases}$$

方程组中  $R(t)$  和第一个、第二个方程之间没有关联, 因而由  $dS/dt = -\alpha SI$ ,  $dI/dt = -\alpha SI - \beta I$  可获得  $dI/dS = (\alpha SI - \beta I)/(-\alpha SI)$ , 也就是  $dI/dS = -1 + (\beta/\alpha S)$ , 这属于简单变量分离方程, 解为  $I(S) = -S + (\beta/\alpha) \ln S + C$ , 设定  $t = t_0$  时,  $I(t_0) = I_0$ ,  $S(t_0) = S_0$  为初始条件, 即  $\rho = \beta/\alpha$ , 将其代入上式可获得  $C = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0$ , 方程满足初始条件特解如下:

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln(S/S_0)$$

阈值用  $\rho = \beta/\alpha$  表示, 通过分析, 当  $S_0 > \rho$ , 也就是未感染病毒的, 可执行程序数目要大于阈值时, 病毒才会蔓延.

## 2 结 语

本文基于常微分方程数学模型, 对其在大学数学教学实际问题进行了研究, 得出如下结论:

(1) 分析了常微分方程数学模型在解决传染病模型问题、经济调整问题、废物处理中碰撞问题、计算机病毒传播问题中的应用.

(2) 常微分课程教学在选择微分方程建模案例时, 会选择与学生实际相结合的方式进行, 基于相关常微分方程的知识对问题进行预测或解释.

(3) 在教学过程中采取提出问题、分析问题、模型建立、模型求解的案例教学模式, 向学生讲清微分方程实际背景, 列出微分方程并求解, 然后实际现象对生活中的实际问题进行解释, 将数学建模思想与常微分方程教学相结合, 能够促进学生提高解决实际问题的综合能力, 并以更积极的态度探索问题, 加深学生对数学建模的进一步认识, 从而提高学生的学习兴趣.

### 参考文献:

- [1] 刘庆辉. 基于常微分方程课程教学内容改革的思考与研究 [J], 成都师范学院学报, 2017, 33(5): 115-118.
- [2] 陈艳凌. 数学建模思想在数学课程教学中的渗透 [J], 长春师范大学学报, 2018, 37(2): 101-103.

- [3] 李萍, 赵武. “常微分方程”实验教学方法探索 [J], 实验科学与技术, 2017, 15(5): 127-130.
- [4] 李明伟. 数学建模思想融入常微分方程教学的探讨 [J], 高教学刊, 2018(1): 93-96.
- [5] 高云天. 常微分方程模型在物体冷却问题中的应用 [J], 数学学习与研究, 2015(21): 135-135.
- [6] 王保军. 线性微分方程近似解的 LS-SVM 算法研究 [D], 西安: 西安电子科技大学, 2018.
- [7] 赵俊萍, 时文平. 数学建模在常微分方程中的应用 [J], 课程教育研究, 2018(38): 138.
- [8] Qiu Y, Tao H U, Liang B, et al. Robust estimation of parameters in nonlinear ordinary differential equation models [J], Journal of Systems Science & Complexity, 2016, 29(1): 41-60.
- [9] 张晶晶. 基于改进粒子群算法求解常微分方程定解问题 [D], 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.
- [10] Thom, Vidar E. From finite differences to finite elements a short history of numerical analysis of partial differential equations [J], Chemical Product & Process Modeling, 2015, 128(3): 1-54.

## Discussion and Research on the Modeling Case of Ordinary Differential Equations to Solve Practical Problems in Teaching Practice

Ji Lixia, Liu Zihui

(Yancheng Preschool Teachers College, Yancheng 224000, China)

**Key words:** mathematical model; ordinary differential equation; teaching

**Abstract:** This paper analyses the application of mathematical model based on ordinary differential equation to the problems of infectious disease, economic adjustment, computer virus transmission in the course teaching practice. The combination of mathematical modeling idea and ordinary differential equation teaching will help improve students' comprehensive ability to solve practical problems and stimulate their interest in learning.