第三讲

导数的例

导数的几何意义

例7 求函数 $y=x^n$ 的导数，n为正整数.

解 由于 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$

$$=\left(nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n\right)\Big/\Delta x$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1},$$

因此

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\ \Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

当 $y=x^2$ 时，$y'=2x$； $y'\big|_{x=4}=2x\big|_{x=4}=8$

例8 证明:

(i) $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x;$

(ii) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}\ \ (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

(iii) $(a^x)' = a^x \ln a$.

我们只证明 (i) 的第二式和 (iii) .

证 (i) 由于 $\quad\quad$ (i) $(\cos x)' = -\sin x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= -\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

而 $\sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，所以

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= -\sin x.$$

证 (iii) 由于 (iii) $(a^x)' = a^x \ln a$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= a^x \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x}$$

因此

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x}$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a .$$

特别有 $(e^x)' = e^x \ln e = e^x .$

导数的几何意义

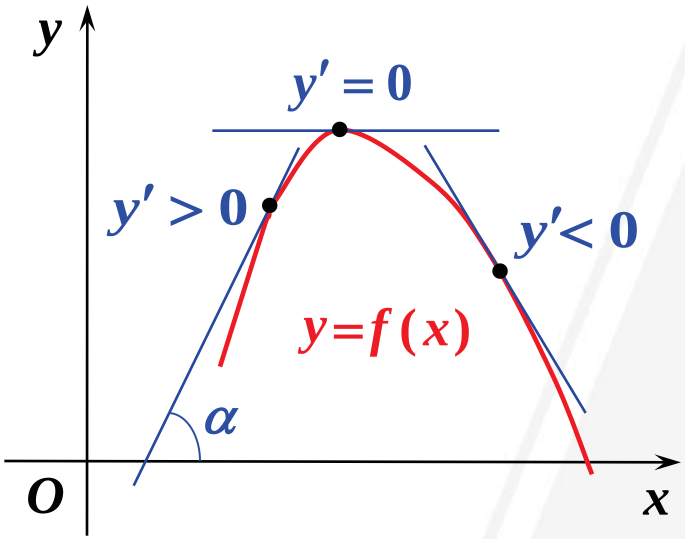
在用几何问题引出导数概念时，已知 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率. 所以该切线的方程是

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{8}$$

记 α 为切线与 x 轴正向的夹角，则

$$f'(x_0)=\tan\alpha.$$

由此可知， $f'(x_0)>0$ 说明 α 是锐角； $f'(x_0)<0$ 说明 α 是钝角；$f'(x_0)=0$ 说明 $\alpha=0$（切线与 x 轴平行）.

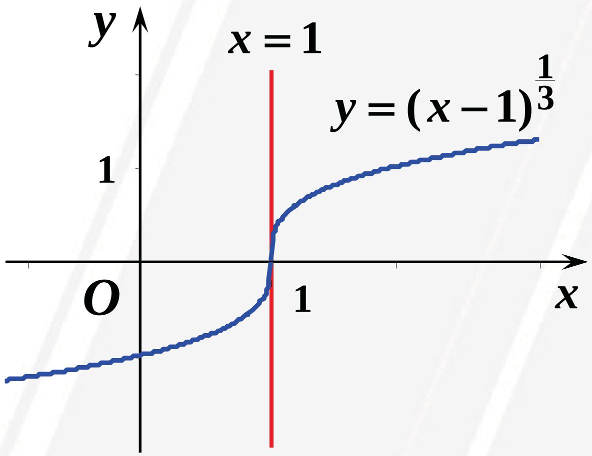


特别要注意，如果 f 在点 x_0 连续，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

则曲线 $y=f(x)$ 在点 P 的切线垂直于 x 轴，此时

$y=f(x)$ 在点 P 的切线方程为 $x=x_0$. 如右图所示，曲线 $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 在点 (1,0) 处符合上述特征，故在该点处的切线方程为 $x=1$.



例9 求曲线 $y=\ln x$ 在其上任一点 $P(x_0,\ln x_0)$ 处的切线和法线方程.

解 由例 8 的 (ii) 知道

$$y'\big|_{x=x_0}=(\ln x)'\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0},$$

因此 $y=\ln x$ 在点 P 的切线方程和法线方程分别为

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

$$y-\ln x_0=-x_0(x-x_0).$$

例10 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $P(0, 0)$ 处的切线和法线方程.

解 由于 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处连续, 且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty,$$

所以 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $P(0,0)$ 处的切线、法线方程分别为 $x=0$ 和 $y=0$.

除几何外, 还有很多物理问题与瞬时变化率有关, 例如瞬时电流强度 $i\,(t)$ 是通过导线截面电量 $q(t)$ 的变化率, 即

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}=q'(t).$$

质量分布不均匀的金属丝，以 $m\,(x)$ 表示从 0 到 x 的质量，则它在 x 处的线密度 $\rho\,(x)$ 是 $m\,(x)$ 在 x 处的变化率，即

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=m'(x).$$

除了上面介绍的几何和物理问题外，导数在其他领域(如经济、化学、生物等)也有广泛的应用.