第十讲

习题课(二)

重要内容回顾

1. 求导的四则运算；

2. 复合函数、反函数求导；

3. 参变量函数的求导；

4. 基本求导公式.

补充例题

例1 求 $f(x)=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的导数.

解 $f'(x)=\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

例2 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}3x^2-8x+4, & x<2,\\ \ln(x^2-3), & x\ge 2\end{cases}$ 的导数.

解 需分段求导

$x<2$时，$f'(x)=(3x^2-8x+4)'=6x-8$,

$x>2$时，$f'(x)=(\ln(x^2-3))'=\dfrac{2x}{x^2-3}$,

$x=2$时，

$$f'_-(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2-8x+4-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(3x-2)(x-2)}{x-2}=4,$$

$$f'_+(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x^2-3)-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(1+(x^2-4))}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2} = 4,$$

综合起来有

$$f'(x) = \begin{cases} 6x-8, & x<2, \\ \dfrac{2x}{x^2-3}, & x\ge 2. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2-8x+4, & x<2, \\ \ln(x^2-3), & x\ge 2 \end{cases}$$

例3 求 $y = x^{x^{\sin x}}$ 的导数.

解 采用对数求导法： $y = x^u$， $u = x^{\sin x}$

而 $u' = (x^{\sin x})' = x^{\sin x}(\sin x \ln x)'$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right),$$

所以 $y' = x^{x^{\sin x}}(x^{\sin x}\ln x)'$

$$= x^{x^{\sin x}}((x^{\sin x})'\ln x + x^{\sin x}(\ln x)')$$

$$= x^{x^{\sin x}}\left(\left(x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\right)\ln x + x^{\sin x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{x^{\sin x}} x^{\sin x}\left(\cos x \ln^2 x + \frac{\sin x}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

例4 求心形线方程 $r=a(1+\cos\varphi)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 先化为参数方程:

$$\begin{cases} x=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad -\pi<\varphi\le\pi,$$

因为 $x'=-a(\sin\varphi+\sin2\varphi)=-2a\sin\dfrac{3}{2}\varphi\cos\dfrac{\varphi}{2}$,

$$y'=a(\cos\varphi+\cos2\varphi)=2a\cos\frac{3}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2},$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'}{x'}=-\cot\dfrac{3}{2}\varphi\quad\left(\varphi\ne0,\ \varphi\ne\pm\dfrac{2}{3}\pi\right).$

例5 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解 方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!.$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$

$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore\quad f'(0)=-99!.$$

例6 证明：圆 $r = 2a\sin\theta(a>0)$ 上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

解 设圆上任一点切线与向经的夹角为 φ, 由第九讲(5)式知，$\tan\varphi = \dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}$，$r'(\theta) = 2a\cos\theta$,

于是有 $\tan\varphi = \dfrac{2a\sin\theta}{2a\cos\theta} = \tan\theta,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2}.$

因为 $0 \le \varphi \le \pi$，所以 $\varphi = \theta$.

这表明圆 $r = 2a\sin\theta(a>0)$ 上任意一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.