第四讲

函数极值与费马定理

函数的极值

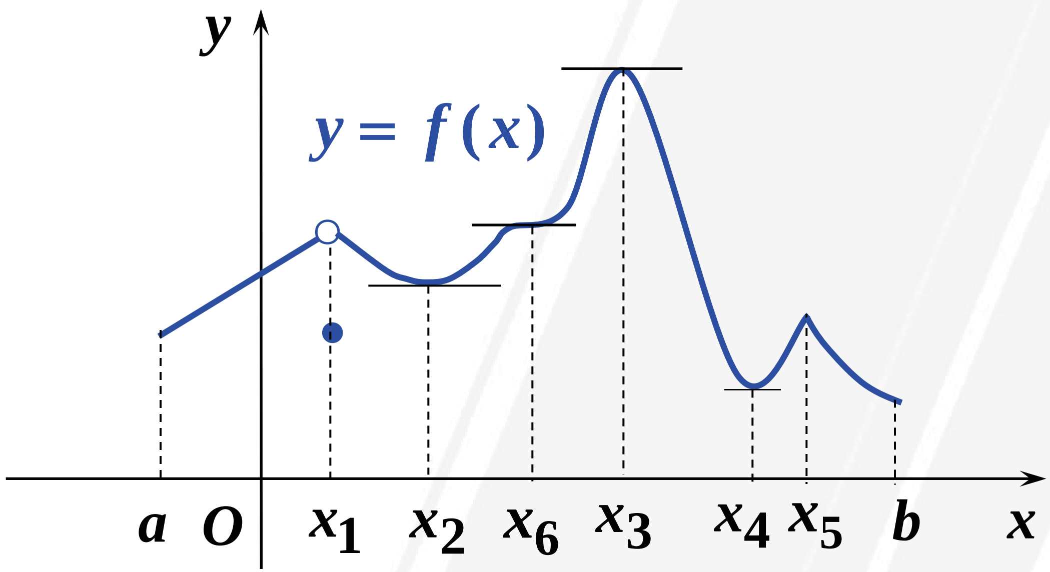
定义3

如果函数 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x)\le f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)\ge f(x_0)),$$

则称函数 f 在 x_0 处取得极大(或极小)值, 称**点** x_0 为极大(或极小)值点. 极大值、极小值统称为极值, 极大值点、极小值点统称为极值点.

如图，函数 $y=f(x)$ 在 x_1, x_2, x_4 处取极小值，在 x_3, x_5 处取极大值. 由于极值是一个局部性概念，因此如果出现某一极大值反而小于另一极小值的现象，那是不足为奇的. 此外，在 x_6 处虽然也有水平切线，但它不是极值点.



例11 证明：若 $f'_+(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使对任何 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有

$$f(x) > f(x_0). \tag{9}$$

证 由右导数的定义:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

及极限保号性，可知存在 $\delta > 0$, 使得

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta),\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

再由 $x > x_0$, 得 $f(x) - f(x_0) > 0$, 于是 (9) 式成立.

类似地，若 $f'_-(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad f(x) < f(x_0).$$

留作习题

例11说明，若 $f'(x_0)$存在且不等于0，则 x_0 不是 $f(x)$的极值点.

根据例11的结论，我们立即得到著名的费马定理.

若 $f'_+(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使对任何 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$，有 $f(x) > f(x_0)$.

费马定理

定理5.3(费马定理)

设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且在点 x_0 可导. 如果 x_0 是 f 的极值点，则必有

$$f'(x_0)=0.$$

上述定理的几何意义：如果 f 在极值点 $x=x_0$ 处可导，则该点处的切线平行于 x 轴.

称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为 f 的稳定点（驻点）.

注 稳定点不一定都是极值点，如 $x=0$ 是 $y=x^3$ 的稳定点, 但不是极值点. 反之, 极值点也不一定都是稳定点, 如 $x=0$ 是 $y=|x|$ 的极小值点，但不是稳定点 (因为它在 $x=0$ 处不可导).

费马 (Fermat, P. 1601-1665, 法国)

复习思考题

1. 给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的 “$\varepsilon-\delta$” 定义.

2. 给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可导的 “$\varepsilon-\delta$” 定义.

3. 举出一个函数 $y=f(x)$, 它满足

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

但 $x=x_0$ 不是它的垂直切线.

4. 举出一个函数 $f(x)$, 要求它可导, 但 $f'(x)$ 不连续. 试想：这种不连续的导函数是否仍有介值性?