

文章编号: 1007-9831 (2021) 09-0069-04

数值分析中牛顿迭代法的思政融合教学研究

路康亚, 孙莹

(北京信息科技大学 理学院, 北京 100192)

摘要: 数值分析是一门理论与实践紧密结合且应用广泛的课程. 为推进中国特色高等教育的发展, 以求解非线性方程的牛顿迭代法为研究对象探索其与思想政治教育的融合, 将有助于探究新时代数值分析课程的教学模式. 以北斗导航系统的定位问题、视频图像处理中的平方根倒数算法和行星的运行轨迹问题为例引出牛顿迭代法, 可以激发学生的学习兴趣 and 爱国情怀. 将方法原理、数值实验、理论分析与思想政治教育相结合, 可以增强课程的趣味性、知识性和实用性, 培养学生独立思考和勇于创新的精神.

关键词: 牛顿迭代法; 思想政治教育; 数值实验; 理论分析

中图分类号: O241.7 : G642.0 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-9831.2021.09.016

Research on the teaching of Newton iteration method integrating ideology and politics in numerical analysis

LU Kangya, SUN Ying

(School of Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract: Numerical analysis is a widely applied course that combines theory and practice closely. In order to promote the development of higher education with Chinese characteristics, it's helpful to explore the teaching mode of numerical analysis course in the new era by taking Newton iteration method for solving nonlinear equations as the research object to explore the integration with ideological and political education. The positioning problem of Beidou navigation system, the square root reciprocal algorithm in video and image processing and the orbit problem of planets are taken as examples to introduce the Newton iteration method to stimulate students' interest in learning and patriotic feelings. Combining the principle of method, numerical experiment, theoretical analysis with the ideological and political education can enhance the interest, knowledge and practicality of the course, and cultivate the students' spirit of independent thinking and innovation.

Key words: Newton iteration method; ideological and political education; numerical experiment; theoretical analysis

数值分析主要研究用计算机求解科学研究、工程技术、管理经济等领域涉及的数学问题的数值方法设计、理论分析和软件实现. 课程内容丰富, 包括了插值方法、函数逼近、数值积分与数值微分、解线性方程组的直接方法和迭代方法、非线性方程(组)的数值解法、常微分方程初边值问题的数值解法等知识^[1-2], 为理工科本科生和研究生的逻辑思维训练和算法设计与实现奠定了良好的数值基础. 而对于本门课程, 除生动、直观地讲解课程内容, 注重课程方法与理论相结合, 注重与数字化和智能化的时代背景相融合^[3-4]

收稿日期: 2021-03-11

基金项目: 北京信息科技大学研究生课程建设项目(2020YKJ01); 北京市教育委员会科技计划项目(KM202011232019)

作者简介: 路康亚(1990-), 女, 河北邢台人, 副教授, 博士, 从事数值代数研究. E-mail: lukangya@bistu.edu.cn

外,在课堂中融入思想政治教育,落实立德树人根本任务也是教学探究中不可或缺的环节^[5]。本文以非线性方程(组)求根问题的牛顿迭代法为例,探讨新时代数值分析课程与思想政治教育的融合。

1 非线性方程(组)求根问题的牛顿迭代法

非线性方程(组)求根问题是求非线性方程 $f(x) = 0$ 的解,其中 $f(x)$ 是非线性函数。这类问题在描述卫星或行星的运行轨迹^[6-8]、视频游戏制作^[9-10]、金融分析^[11]、GPS定位和北斗导航系统的设计^[12]等方面具有广泛应用。卫星导航的定位问题最终可以归结为一个四元非线性方程组,因而可用牛顿迭代法来进行求解。类似地,行星的运行轨迹问题会涉及到开普勒方程 $x - r \sin(x) = M$ 的求解,其中 $r \in (0, 1)$ 代表偏心率, M 代表平近点角。此类非线性方程依然可用牛顿迭代法来进行数值求解。

牛顿迭代法格式简单,只需给定初值 x_0 ,按照格式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 进行迭代,便可用于求解非线性方程 $f(x) = 0$,且收敛速度快,是目前求解非线性方程(组)最基本、最常用的数值方法,也是求解无约束优化问题的有效方法。熟练掌握和应用该方法可以为学生日后从事算法设计、科学研究和工程应用奠定良好的基础。

2 牛顿迭代法的思政融合

在牛顿迭代法的教学中,将课程引入、方法阐述、数值实验、理论分析分别与爱国主义教育、数学文化、科研素养和科研精神、马克思主义哲学思想相融合,力求丰富课程内容的同时,紧跟时代背景,全方位、多角度地为学生建立完整的知识体系,并将思想价值引领贯穿教育教学的全过程。

2.1 课程引入与爱国主义教育相结合

正所谓“九层之台,起于累土;千里之行,始于足下”,生动有趣的课程引入是良好教学实践的开端,可以迅速吸引学生的注意力,点燃学生的好奇心和求知欲,为课程核心内容和核心价值的开展奠定基础。在牛顿迭代法的教学中可以通过北斗导航系统中定位问题的非线性方程组、上世纪90年代3D游戏的传奇算法——快速平方根倒数算法、行星运行轨迹的开普勒方程等实际问题引出非线性方程(组)的应用,调动学生的学习热情。

在课程引入时,通过介绍北斗导航系统的定位问题,可以向学生强调:北斗系统是我国自主建设、独立运行的卫星导航系统,这不仅体现了我国科技的进步,对国家安全和经济社会发展也具有重要作用。借此可以突出我国科研、科技的进步和创新,激发学生的学习兴趣 and 爱国情怀,激励学生敢于探索、勇于创新。在展示基于牛顿迭代的快速平方根倒数算法时,以3D游戏界面为例吸引学生,点燃学生的学习热情,然后讲解该算法的简洁、巧妙之处,及其在视频、图像等多媒体处理中的广泛应用,帮助学生建立数值概念,感受牛顿迭代法的实用价值和魅力。同时,可告知学生视频图像处理与芯片密切相关,而我国的核心芯片目前仍受制于人,亟需广大青年艰苦奋斗,突破技术瓶颈,为科技发展贡献力量。

2.2 方法阐述与数学文化相结合

在课程引入激发起学生的好奇心和学习热情之后,可以采用几何直观到代数推导的方式讲述牛顿迭代法的原理。首先,利用“以直代曲”的思想,用切线 $p(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ 来近似曲线 $f(x)$,从几何角度推出牛顿迭代格式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$);然后,由切线的表达式引出曲线 $f(x)$ 的泰勒展开式,展现曲线和直线表达式之间的关系,以及非线性函数线性化的思想,从代数角度再次得到牛顿迭代法。此时,基于方法名称可以向学生讲述牛顿的学术成就以及他的个人事迹以传播数学文化,激励学生在以后的学习和工作中勤于思考、努力拼搏、积极进取。牛顿是一位伟大的数学家和物理学家,与莱布尼茨分别独立创立了微积分;提出了力学三大定理和万有引力,被称为“近代物理学之父”。他在伦敦大瘟疫时期继续研究微积分学、光学和万有引力的事迹可以勉励学生即使身处险境也要坚持不懈、勇于探索。同时,将这一事迹与当前所处的疫情阶段相联系,鼓励学生潜心学习勤自勉,厚积薄发创伟业。

此外,借助牛顿迭代法几何表示中“以直代曲”的思想,可以引导学生思考国内外数学家应用该思想

解决数学问题的案例,以激发学生的探究欲望,让学生主动参与课堂教学,扩宽学生的视野和思维,传播数学思想,并通过中外对比激励学生努力拼搏、开拓创新.首先,“以直代曲”也是微积分的重要思想,例如:定积分的概念中将积分区间划分为若干个小区间,并用小区间对应的小矩形面积来近似小曲边梯形的面积,然后通过求和来逐步逼近曲线的积分,本质上就是在每个小区间利用直线来近似曲线.其次,我国三国时代数学家刘徽求解圆周率的“割圆术”:在圆内作正多边形来逐步逼近圆周,也是一种典型的“以直代曲”的思想.由此可见,我国古代的数学发展不亚于西方国家,即使是现代也不乏蜚声国际的数学家,如华罗庚、陈景润、冯康等.以此,建立学生的民族自信心和自豪感,激励学生以这些数学家为榜样,为当代中国的数学研究增砖添瓦.

2.3 数值实验与科研素养和科研精神相融合

牛顿迭代法的方法原理阐述完成后,以开普勒方程 $x - 0.9\sin(x) = 1$ 为例,直观展示牛顿迭代法求解非线性方程的有效性,以激发学生思考该方法背后的收敛性理论.在具体执行牛顿迭代法时,首先需要选定迭代初始值 x_0 .此时可以引导学生利用函数的单调性,通过画图初步确定开普勒方程的求解区间,以调动学生的积极性和主动性,养成勤于动手、善于思考的好习惯.具体地,通过分析非线性函数 $f(x) = x - 0.9\sin(x) - 1$ 的单调性可以初步判定它的根位于区间 $[0, \pi]$.紧接着,分别取初值为 $x_0 = \pi$ 和 $x_0 = 0$ 进行数值实验,并展示其牛顿迭代序列函数值 $|f(x)|$ 随迭代步数 n 的变化曲线(见图1).

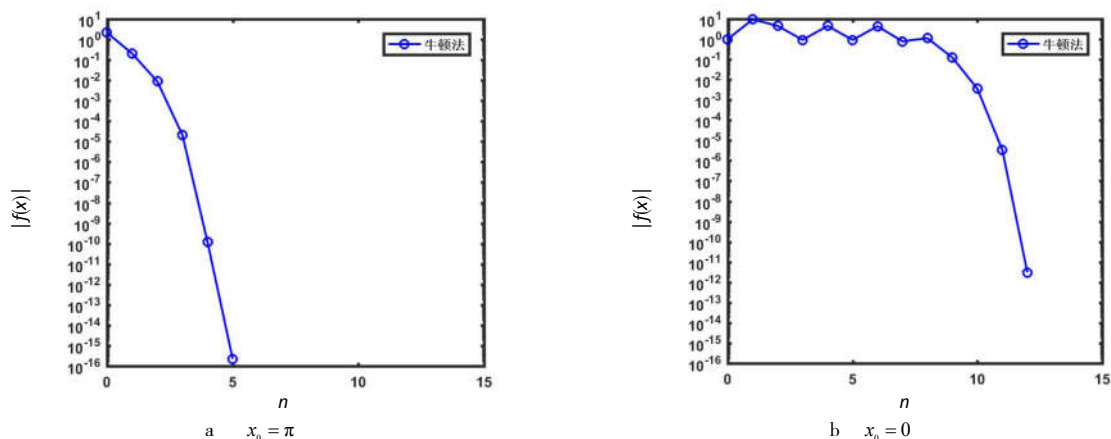


图1 牛顿迭代序列函数值 $|f(x)|$ 随迭代步数 n 的变化曲线

根据图1中函数值的下降曲线,可采用启发式的互动方式鼓励学生大胆猜测牛顿迭代法的收敛性态.首先,由函数值逐步趋向于0可以看出,牛顿迭代法求解开普勒方程 $x - 0.9\sin(x) = 1$ 是收敛的.其次,当初值 $x_0 = \pi$ 时,可以观察到函数值的下降曲线近似是一条抛物线,即二次曲线;当初值 $x_0 = 0$ 时,函数值的下降曲线在初始阶段是震荡的,之后也近似是一条抛物线.由此可逐步引导学生大胆猜测牛顿迭代法的收敛性和初值有关,且当初值选取恰当时该牛顿迭代法是二次收敛的.同时,告诉学生科学地提出假说或猜测是科研实践的重要环节,如著名的费马猜想、四色猜想和哥德巴赫猜想等.爱因斯坦的广义相对论、杨振宁和李政道先生的弱相互作用中的宇称不守恒定律等都是建立在大胆猜测的基础之上.而且“数学王子”高斯(Gauss)曾说过:“没有大胆的猜测就没有伟大的发现”.以此可以引导学生根据实验结果大胆猜测、勇于创新,培养学生观察结果、归纳方法、独立思考问题的能力,提升学生的综合素质,同时也可以激发学生对科研的热情,培养学生的科研思路和科研精神,提升学生的科研素养.

2.4 理论分析与马克思主义哲学思想相结合

有了实验结果和猜测结论之后,还需要进行理论分析来佐证实验和猜测,从而形成完整的科学体系.为此,由实验结果猜测牛顿迭代法收敛性与初值的相关性过程中,可引导学生对牛顿迭代法进行局部收敛性分析.事实上,对于一般的非线性方程 $f(x) = 0$,非线性函数的一阶导数 $f'(x)$ 没有统一的表达式,很难进行全局收敛性分析.又由于牛顿迭代法本质上是一种不动点迭代,在局部收敛性分析中,根据不动点迭代

的局部收敛性定理,可以逐步得到牛顿迭代法的收敛性定理:设 x^* 是 $f(x)=0$ 的一个根, $f(x)$ 在 x^* 附近二阶导数连续且 $f'(x^*)\neq 0$,则牛顿迭代法至少二阶局部收敛,且 $\lim_{k\rightarrow\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{\varphi''(x^*)}{2!}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.这实际

上就是理论来源于实践的案例.实践是理论形成和发展的源泉,只有在实践中不断探索和认识事物的发展规律,才能逐渐形成科学的理论.但科学的理论形成之后又会对实践产生重要的指导作用,这也是马克思主义认识论的一个基本原理:实践是检验真理的唯一标准.借此可向学生阐述理论和实践之间辩证统一、互存互助的关系.

根据科学理论对实践具有指导作用的哲学思想,可以进一步引导学生根据收敛性定理,从理论角度分析数值实验案例中求解开普勒方程 $x-0.9\sin(x)=1$ 的牛顿迭代法的收敛性态,并与数值实验作对照.具体地,由 $f(x)=x-0.9\sin(x)-1$,可得 $f'(x)=1-0.9\cos(x)\neq 0$ 且 $f''(x)=0.9\sin(x)$,由于 $x^*\in(0,\pi)$,因此 $f''(x^*)\neq 0$.由牛顿迭代法的收敛性定理可知,求解该开普勒方程的牛顿迭代法二阶局部收敛.这与图1中的实验结果是相一致的,当初值充分靠近真解时对应于函数值的下降曲线为抛物线,而且牛顿迭代法对于不同的初值会产生不同的收敛效果.事实上, 0 比 π 更加远离真解 x^* ,因此在迭代初期会发生震荡,当迭代点越来越靠近真解时才会呈现二次收敛的规律.以此提醒学生在使用牛顿迭代法时要尽可能地选取和真解靠近的初值,引导学生学习如何利用理论知识分析数值实验中呈现的各种现象,并由此总结经验以便以后更好地进行实践.此外,更加具体的不同初值的收敛性对比实验可以让学生课下自己动手完成,亲身体会牛顿迭代法对初值的依赖性.在此可引用陆游的诗句“纸上得来终觉浅,觉知此事要躬行”向学生强调实践的重要性.同时,也要告诉学生中国共产党之所以能够历经南昌起义、秋收起义、两万五千里长征等种种考验和磨难无往而不胜,关键就在于不断的实践创新和理论创新.以此鼓励学生在日常生活、学习或科学研究中发扬艰苦奋斗的精神,践行社会主义核心价值观,坚持知行合一,积极探索,开拓创新,以推动社会发展和科技进步.

3 结语

数值分析中数值方法的设计思路、理论分析和计算机实践是科学研究、工程设计、软件开发的基础.在牛顿迭代法的课程引入、方法原理、数值实验和理论分析中融入思想政治教育,可以为数值分析中其它课程内容提供教学参考,提升课程的趣味性、知识性、前沿性和教育性.同时,可以帮助学生融合科学研究的思路,建立完整的知识体系,树立正确的人生观、价值观,并且激发学生的好奇心和求知欲,培养学生主动学习、勤于思考、勇于创新的精神.

参考文献:

- [1] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析[M].5版.北京:清华大学出版社,2008.
- [2] 王晓锋.数值分析课程教学改革研究[J].高师理科学刊,2016,36(3):36-38.
- [3] 钟尔杰,黄廷祝.“数值分析”课程的探究式教学[J].中国大学教学,2008(9):31-32,48.
- [4] 彭卓华,王莉.大数据时代数值分析课程教学改革研究[J].当代教育理论与实践,2020,12(4):48-52.
- [5] 闵杰,李璐,欧剑.《数值分析》课程思政教学改革研究与实践[J].大学数学,2020,36(6):40-45.
- [6] 赵进义.天体力学[M].上海:上海科学技术出版社,1983.
- [7] 钟振,杨敏.月球着陆器过渡轨道的数值仿真[J].西南大学学报(自然科学版),2017,39(7):168-173.
- [8] 钟振,刘子恒.基于新近重力场模型MRO120D的火星探测器轨道仿真与分析[J].西南大学学报(自然科学版),2018,40(5):133-139.
- [9] 程竟然.计算机三维图形中一个平方根倒数算法的数学证明及优化[J].数值计算与计算机应用,2013,34(4):266-278.
- [10] 周泉,杨靓,何卫强.平方根倒数速算法的精度优化[J].微电子学与计算机,2019,36(5):64-69.
- [11] 马青华,李艳涛,吕书强.用改进的Newton-Raphson方法计算隐含波动率[J].西南师范大学学报(自然科学版),2015,40(7):50-53.
- [12] 李坤.北斗卫星系统高精度定位关键技术研究[D].成都:电子科技大学,2018.