数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

§4 函数的极值与最大（小）值

极大(小)值是局部的最大(小)值,它有着很明显的几何特征.在本节中,我们将逐一研究函数的这些几何特征.

一、极值判别

二、最大值与最小值

*点击以上标题可直接前往对应内容

第十六讲

函数极值的第一和第二充分条件

极值判别

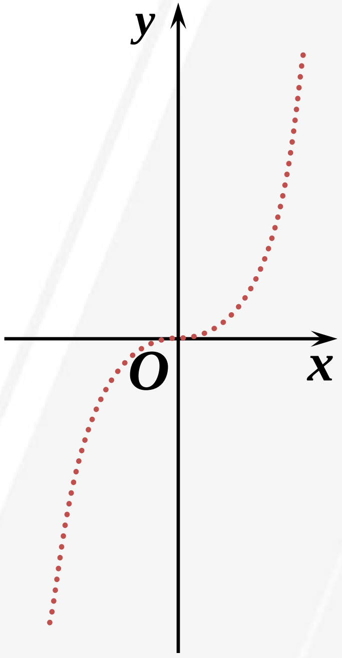
费马定理告诉我们，可微函数的极值点一定是稳定点. 也就是说, 在曲线上相应点处的切线一定是水平的.

我们在这里再次强调：费马定理是在函数可微的条件下建立的. 换句话说，若没有可微这个前提条件，费马定理的结论 $f'(x)=0$ 就无从说起.

当然，费马定理的逆命题亦不真. 例如函数

$y = x^3$在点 $x = 0$ 的导数为零,

但 $x = 0$ 不是它的极值点.



下面给出极值的充分条件.

定理6.11（极值的第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，在某邻域$U^\circ(x_0;\delta)$上可导.

(i) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)\le 0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\ge 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值.

(ii) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)\ge 0$, 当$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\le 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值.

证 根据导函数的符号判别函数单调性的方法, 可以知道该定理的几何意义十分明显. 在这里仅给出 (i) 的证明.

因为 $f'(x)\le 0$, $x\in(x_0-\delta,x_0)$, $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上递减，故

$$f(x)\ge f(x_0),\ x\in(x_0-\delta,x_0).$$

同理可证 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上递增，故

$$f(x)\ge f(x_0),\ x\in(x_0,x_0+\delta).$$

于是

$$f(x_0)\le f(x),\ x\in U^{\circ}(x_0;\delta),$$

即 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点 .

定理6.12（极值的第二充分条件）

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0;\delta)$内可导，$f''(x_0)$ 存在. 若

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0,$$

那么 $x=x_0$ 是 $f(x)$的一个极值点，并且

(i) $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

(ii) $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

证 同样我们仅证(i). 因为

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

所以由保号性, 存在$\delta>0$, 当 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)$时,

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0.$$

从而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时， $f'(x)<0$;

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时， $f'(x)>0$.

由极值判别的第一充分条件得知 x_0 是极小值点 .

例1 求函数 $f(x)=3\arctan x-\ln x$ 的极值点.

解 由

$$f'(x)=\frac{3}{1+x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-(x^2-3x+1)}{x(1+x^2)}=0,$$

求得稳定点

$$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

当 $0<x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 时，$f'(x)<0$;

当 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时，$f'(x)>0$;

当 $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时，$f'(x)<0$.

所以 x_1 是 $f(x)$ 的极小值点，

x_2 是 $f(x)$ 的极大值点.

（参见右图）