第七讲

反函数的导数

复合函数的导数

反函数的导数

定理5.7

设 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数，φ 在点 y_0 的某邻域内连续、严格单调，且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，

则 f 在点 $x_0=\varphi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}. \tag{6}$$

或

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}}. \tag{6'}$$

证 设 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, 则

$\Delta x = \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0)$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

由假设, $f = \varphi^{-1}$ 在 x_0 的某邻域内连续且严格单调, 从而有

$$\Delta x = 0 \Leftrightarrow \Delta y = 0;\ \Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0;$$

注意到 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 便可证得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

$y = f(x)$ $x = \varphi(y)$ $$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}. \quad (6)$$

例4 求下列函数的导数：

(i) $\arcsin x$ 和 $\arccos x$；

解 (i) $y=\arcsin x,\ x\in(-1,1)$ 是 $x=\sin y$ 在 $(-\pi/2,\ \pi/2)$ 上的反函数，故

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1).$$

同理， $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$.

(ii) $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$.

$y = \arctan x$ 是 $x = \tan y$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的反函数，

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

同理有

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

复合函数的导数

定理5.8

设 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0). \quad (7)$$

我们用有限增量公式来证明这个定理.

在第二讲讨论过有限增量公式：

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$$

并且，公式对 $\Delta x=0$ 也是成立的.

证 因 $f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，由有限增量公式，得

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\cdot\Delta u \quad \lim_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0. \qquad (*)$$

且公式对 $\Delta u=0$ 也成立. 又因 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = \lim_{\Delta x\to 0}\big(\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)\big)=0.$$

用 $\Delta x\neq 0$ 除以 (*) 式两端，得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

于是就有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= f'(u_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$$

复合函数求导公式 (7) 又称为 “链式法则”.

若将公式(7)改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

其中 $y=f(u),u=\varphi(x)$，这样就容易理解 “链” 的意义了.

在链式法则中一定要区分

$$f'(\varphi(x))=f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$$

与 $(f(\varphi(x)))'=\left(f\circ\varphi\right)'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$

不同的含义.

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'\left(\varphi(x_0)\right)\varphi'(x_0).\quad(7)$$