数学分析 第一章
实数集与函数

§4 具有某些特性的函数

本节将着重讨论函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性.

一、有界函数
二、单调函数
三、奇函数与偶函数
四、周期函数

*点击以上标题可直接前往对应内容

第六讲

函数的有界性

有界函数

定义1

设 f 定义在D上，

若$\exists M\in\mathbf{R},\forall x\in D,\ f(x)\le M$，则称 f 在 D 上有上界；

若$\exists L\in\mathbf{R},\forall x\in D,\ f(x)\ge L$，则称 f 在 D 上有下界；

例如 $y=\dfrac{1}{x},x\in(0,1]$ 有下界；

$y=D(x),x\in\mathbf{R}$ 既有上界，又有下界；

有上（下）界的等价条件

f 在 D 上有上界 $\Leftrightarrow$ $\exists M>0,\ \forall x\in D,\quad f(x)\le M.$

f 在 D 上有下界 $\Leftrightarrow$ $\exists L>0,\ \forall x\in D,\quad f(x)\ge -L.$

定义2

设 f 定义在 D 上，

若 $\exists M>0,\ \forall x\in D, |f(x)|\le M$，则称 f 在 D 上有界.

易证 f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow$

f 在 D 上既有上界又有下界.

例如 正弦函数 $\sin x$,余弦函数 $\cos x$ 均为 R 上的有界函数.

若 $\forall M\in \mathbf{R},\ \exists x_0\in D,\ f(x_0)>M$,则称 f 在 D 上无上界;

若 $\forall L\in \mathbf{R},\ \exists x_0\in D,\ f(x_0)<L$, 则称 f 在 D 上无下界;

若 $\forall M\in \mathbf{R},\ \exists x_0\in D,\ |f(x_0)|>M$, 则称 f 在 D 上无界.

类似地，无上（下）界的等价条件

f 在 D 上无上界 $\Leftrightarrow$

$$\forall M>0,\quad \exists x_0\in D,\quad f(x_0)>M;$$

f 在 D 上无下界 $\Leftrightarrow$

$$\forall L>0,\quad \exists x_0\in D,\quad f(x_0)<-L,$$

f 在 D 上无界 $\Leftrightarrow$

$$\forall M>0,\quad \exists x_0\in D,\quad |f(x_0)|>M,$$

例1 证明: $f(x)=\tan x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上无上界, 有下界.

证 取 $L=0$, 则 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) \geq L$, 因此 f 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上有下界. $\forall M \in \mathrm{R}$, 取 $x_0 = \arctan(M+1)$, 则 $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan x_0 = M+1 > M$, 因此 f 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上无上界.

例2 设函数 $f(x), g(x)$ 是 D 上的正值有界函数.

证明： $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

证 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$,

$$g(x) \le \sup_{x\in D}\{g(x)\},$$

因此 $f(x)g(x) \le \sup\{f(x)\}\sup\{g(x)\}$,

由 x 的任意性, 可知 $\sup\{f(x)\}\sup\{g(x)\}$

是 $\{f(x)g(x)\}$ 的一个上界,

因此 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

例3 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界, 证明:

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le \inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.$$

证 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, x_0\in D$, 使 $f(x_0)<\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}+\varepsilon$.

又 $g(x_0)\le \sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$, 故

$$f(x_0)+g(x_0)<\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}+\varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned}\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}&\le f(x_0)+g(x_0)\\&\le \inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}+\varepsilon.\end{aligned}$$

我们得到

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}+\varepsilon.$$

再由ε的任意性，有

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.$$